# ENTRETIENS OU LEÇONS MATHEMATIQUES SUR LA MANIERE...

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ.
XXXIII
B
43
NAPOLI

III

43.

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
B
43
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

# ENTRETIENS

OU

## LEÇONS MATHEMATIQUES

Sur la maniere d'étudier cette SCIENCE, & ſur ſes principales utilités ;

*Avec les*

## ELEMENS D'ARITHMETIQUE & D'ALGEBRE, rangés dans un nouvel ordre, & démontrés ſans calcul littéral.

*PAR*

BENJAMIN PANCHAUD.

*SECONDE PARTIE.*

A LAUSANNE & à GENEVE,
Chez MARC-MICH. BOUSQUET & Comp.

MDCCXLIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

# ENTRETIENS MATHEMATIQUES.

## *ENTRETIEN XV.*

### MATHESIUS NEANDER.

UNE raiſon compoſée, eſt faite de la multiplication de deux ou de pluſieurs raiſons ; & quoique ce terme ſignifie proprement un aſſemblage de raiſons, cependant l'uſage a voulu que ce mot fût reſtreint à marquer le produit des raiſons multipliées les unes par les autres. Si vous me demandés ce que c'eſt, & en quoi conſiſte la multiplication des raiſons, je vous donnerai d'abord une définition dans laquelle je ne m'embaraſſerai pas beaucoup d'y faire entrer l'idée de produit & de facteurs,

après quoi je vous montrerai en quel ſens on peut dire que cette maniére de compoſer les raiſons eſt une multiplication, & en quel ſens elle en différe. Ne vous attendés pas non plus à une définition où cette règle de Logique ſoit exactement obſervée, ſavoir celle qui demande de la briéveté, je vous la ferai à ma fantaiſie ; & dût-elle paſſer pour une *deſcription*, je n'en donnerai pas une autre. Soit une raiſon quelconque ; elle repréſente une grandeur, ou une de ſes parties aliquotes priſe une ou pluſieurs fois: ſoit en même tems une autre raiſon auſſi quelconque, ſi je regarde la priſe de la quantité exprimée par l'antécedent comme une grandeur abſolue, & qu'enſuite je la prenne, ou une de ſes parties aliquotes, une ou pluſieurs fois, ſavoir en la diviſant par le conſéquent de la ſeconde raiſon, & prenant le quotient autant de fois qu'il y a d'unités dans ſon antécedent, je dis que cette derniére valeur ſera au dernier conſéquent en raiſon compoſée des deux que je viens de ſuppoſer.

Une raiſon compoſée eſt donc une raiſon dont la grandeur qui elle, ou une de

de ſes parties aliquotes, priſe, une ou pluſieurs fois, eſt déja une grandeur qui elle, ou une de ſes aliquotes a été priſe auparavant une ou pluſieurs fois. Mais comme ces idées ſont peu familiéres à l'eſprit, il faut néceſſairement ſe ſervir d'exemples; & pour cela prenons d'abord deux raiſons d'égalité, comme $\frac{3}{3}$ & $\frac{5}{5}$. je prends une grandeur, je la diviſe en trois parties, & je les prends toutes trois; je diviſe enſuite cette grandeur qui ſe retrouve la même dans l'antécedent, puiſqu'il prend toutes les parties du conſéquent, je la diviſe, dis-je, par le conſéquent de la ſeconde raiſon qui eſt 5, & je prends toutes les cinquiémes dans le ſecond antécedent, la grandeur demeure donc la même qu'auparavant : ayant une troiſiéme raiſon d'égalité, il eſt clair qu'en ſuivant cette méthode, je retrouverois toujours la même quantité; comme auſſi quand les termes ſeroient $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{7}$, alors une grandeur priſe une fois, c'eſt la prémiére raiſon, & cette même grandeur encore priſe une fois, c'eſt la ſeconde raiſon &c. Voilà ce que c'eſt que de multiplier pluſieurs raiſons d'égalité les unes par les autres, & l'on voit manifeſte-

ment qu'un nombre de telles raiſons quel qu'il puiſſe être exprimant celui des facteurs de cette multiplication, le produit ſera toujours la grandeur prémièrement priſe, comme dans les grandeurs abſolues où le produit continu de l'unité par elle-même ne paſſe jamais ſa valeur, & les raiſons d'égalité étants toutes égales entr'elles peuvent être regardées comme unités. Il n'y a pas d'autre multiplication à chercher que celle que vous venés de voir; auſſi n'y a-t-il rien de plus aiſé à comprendre que ce que je viens de dire. 2° prenons une raiſon d'égalité avec une autre raiſon, ce ſera une grandeur diviſée en un certain nombre de parties dans le conſéquent, qui ſeront toutes repriſes dans l'antécedent, c'eſt-à-dire, qu'on retrouvera la même grandeur que je diviſe une ſeconde fois, par l'autre conſéquent, & dont je prends le quotient ou la partie aliquote autant de fois que l'unité ſe trouve dans le ſecond antécedent; ou bien ſi la raiſon d'égalité eſt ſuppoſée le multipliant, on aura une grandeur diviſée par le conſéquent, le quotient multiplié par l'antécedent, ce produit diviſé par le conſéquent de la raiſon d'égalité, & le conſéquent

séquent multiplié par l'antécedent ; or la valeur du précédent produit se retrouve, parce que le conséquent de la seconde raison est égal à son antécedent, & qu'un produit divisé par un nombre dont le quotient est multiplié par ce même nombre, donne la même quantité. La raison composée de ces deux raisons, savoir d'une raison d'égalité & d'une autre qui ne l'est pas, est donc toujours cette raison d'inégalité ; & ceci s'accorde avec la multiplication ordinaire, dans laquelle un nombre multiplié par l'unité donne pour produit ce nombre lui-même. 3° Je prends deux raisons multiples, je divise la grandeur entiére par le prémier conséquent ; le quotient je le multiplie par l'antécedent, c'est la prémière raison : le prémier antécedent est divisé par le second conséquent, & multiplié ensuite par le second antécédent ; la raison de cette derniére valeur à son conséquent, c'est la raison composée des deux raisons multiples. Par exemple $\frac{12}{2}$ & $\frac{10}{5}$ je prends douze fois la moitié de ma grandeur, & de ces douze moitiés j'en prends 10 fois la cinquiéme partie ; ou bien $\frac{7}{1}$ & $\frac{5}{1}$, je prends une grandeur

ſept fois, & ce multiple cinq fois, la raiſon de la derniére quantité à la grandeur prémièrement priſe, eſt la raiſon compoſée des deux autres qui ſont données. 4° *Deux raiſons ſousmultiples, comme* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{2}{4}$ : je diviſe une grandeur en trois parties, j'en prends une que je partage encore en quatre parties pour avoir 2 de ces quarts de tiers qui expriment la valeur de la derniére par rapport à la grandeur donnée, & c'eſt la raiſon compoſée de ces deux $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{4}$. 5°. Deux raiſons numeriques, comme $\frac{7}{5}$ & $\frac{3}{4}$ ſe multiplient ainſi; je prends ſept fois la cinquiéme d'une grandeur, je diviſe ces ſept cinquiémes en quatre parties & j'en prends trois. 6° *Une raiſon multiple & une ſousmultiple* $\frac{7}{1}$, $\frac{1}{7}$ je prends une grandeur ſept fois, & ce multiple je le diviſe en ſept parties dont j'en prends une, ce qui redonne la même grandeur qu'auparavant. 7° Une raiſon multiple & une numerique étants données comme $\frac{7}{1}$ & $\frac{4}{5}$ je prends une grandeur ſept fois, & quatre fois la cinquiéme de ce multiple. 8° Enfin une raiſon multiple & une numerique $\frac{1}{8}$ & $\frac{3}{4}$ j'ai la huitiéme partie d'une grandeur, & je prends trois fois le quart

quart de ſa valeur. Cela ſuffit ſi je ne me trompe, pour vous donner une idée exacte de la compoſition des raiſons; je ſuis entré dans tout ce détail pour vous en faciliter d'autant mieux l'intelligence, parce qu'il eſt difficile de ſaiſir d'abord cette idée générale qui embraſſe tout dans un ſeul cas.

Il eſt évident que ſi l'on avoit plus de deux raiſons compoſées, il faudroit multiplier d'abord les deux prémières, & ce produit par la troiſiéme, ce nouveau produit par la quatriéme &c. Voyons à préſent en quel ſens on peut dire, que cette compoſition de raiſons eſt une multiplication plus générale que celle que l'on pratique ordinairement; auſſi bien que la maniére dont il faut s'y prendre pour multiplier toutes ſortes de raiſons les unes par les autres; car juſques ici nous avons tâché de donner quelque idée de leur nature, ſans indiquer la méthode qu'il faut ſuivre pour faire ces ſortes d'opérations. Pour cela il n'y a qu'à faire attention d'un côté, que multiplier deux nombres l'un par l'autre, c'eſt, comme nous l'avons ſouvent remarqué, prendre le prémier autant de fois qu'il y a d'unités dans le



Digitized by Google

ſecond ; & de l'autre, que deux nombres ſont toujours des raiſons multiples qui ont un même conſéquent, ſavoir l'unité ; cela étant, conſidérons que l'unité qui eſt la grandeur, priſe pluſieurs fois fait le prémier nombre ou la prémière raiſon, & que ce multiple de l'unité eſt regardé lui-même comme *unité* ; de ſorte que tel qu'il eſt, ſans y rien changer, à cauſe que le conſéquent de la ſeconde raiſon eſt l'unité, ce nombre ſe trouve pris autant de fois que le ſecond antécédent contient ſon conſéquent, c'eſt-à-dire, autant de fois que le ſecond nombre contient d'unités ; ce qui eſt une véritable multiplication ; & le produit eſt à l'unité en raiſon compoſée du multiplié à l'unité, & du multiplicateur auſſi à l'unité. Il ne faut donc pas s'étonner ſi cette maniére de compoſer les raiſons paſſe pour une multiplication, puiſqu'au fond dans celle qui eſt uſitée on y fait conſtamment la même choſe que dans les raiſons compoſées : mais parce que les nombres ſont des raiſons multiples on ne fait pas attention aux conſéquents, & d'ailleurs on s'eſt familiariſé avec cette opération, au lieu que bien

bien des gens n'ont pas la moindre idée de celle dont nous parlons.

Il me reſte à vous démontrer une règle ſûre & générale pour la compoſition des raiſons, & pour reſoudre ce Problème. *Deux ou pluſieurs raiſons étant données trouver la raiſon compoſée de toutes ces raiſons*; c'eſt-à-dire que l'on cherche à voir ce qu'eſt devenue une grandeur qui a paſſé & repaſſé par des diviſions & des multiplications réiterées, & qui s'eſt transformée pour ainſi dire en différentes maniéres, afin de voir le rapport de la derniére transformation avec cette grandeur prémiérement priſe. Je dois prouver que c'eſt en prenant le produit des antécedents & celui des conſéquents de toutes les raiſons que l'on multiplie, que ces deux produits, dis-je, indiquent en combien de parties la prémiére grandeur ſe trouve diviſée, ſavoir le produit des conſéquents, & celui des antécedents combien de fois on prend une de ces parties aliquotes. Mais comme il ſeroit extrêmement difficile de démontrer cela dans une ſeule propoſition, & pour tous les divers cas qui ſe préſentent, je vais les reprendre l'un après l'autre dans le mê-

me ordre dont je me ſuis ſervi pour vous expliquer la nature de ces ſortes de raiſons.

1°. Quand les raiſons compoſantes ſont des raiſons d'égalité, nous avons vû que la grandeur prémièrement priſe demeure encore en raiſon d'égalité; ainſi les produits des antécedents & des conſéquents qui expriment cette raiſon doivent être égaux; or ils le ſont puiſque chaque antécedent eſt égal à ſon conſéquent par la ſuppoſition.

Ayant donc pluſieurs raiſons d'égalité, le produit des antécedents & celui des conſéquents ſeront en raiſon compoſée de chacune de ces raiſons; ou plûtôt il n'eſt pas néceſſaire d'entreprendre cette opération, puiſque dans tous les cas poſſibles la raiſon d'égalité demeure, & il ſeroit auſſi inutile de faire ce calcul que l'on feroit inutilement celui-ci 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. en diſant une fois un c'eſt un, puis encore une fois un c'eſt un, juſques au bout &c. parce que l'on eſt aſſuré que ce produit continu eſt toujours l'unité. 2° Une raiſon d'égalité avec une autre raiſon donnant pour raiſon compoſée celle qui n'eſt pas d'égalité, il eſt encore clair que les deux ter-

termes de la raiſon d'égalité étant néceſſairement égaux, le produit des antécedents, & le produit des conſéquents ſeront l'antécedent & le conſéquent de la raiſon d'inégalité multiplié chacun par une même grandeur, ces deux produits ſeront entr'eux comme les termes de la raiſon d'inégalité, c'eſt-à-dire en raiſon compoſée des deux raiſons dont il s'agit.

3° Deux raiſons multiples ſont encore une raiſon compoſée qui s'exprime par le produit des antécedents & celui des conſéquents; c'eſt ce qui eſt manifeſte quand les deux conſéquents ſont l'unité; mais quand l'une des raiſons, ou que toutes deux s'expriment par nombres, alors on a une grandeur diviſée par le conſéquent de la prémière raiſon, ſon quotient multiplié par l'antécedent, & chacune de ſes aliquotes eſt diviſée par le ſecond conſéquent, de ſorte que le produit des conſéquents exprimera en combien de parties la grandeur eſt diviſée; en effet elle a d'abord été diviſée par le prémier conſéquent, & chaque aliquote par le ſecond; or quand une de ces derniéres aliquotes a été priſe autant de fois qu'il y a d'unités au ſecond conſéquent on a la prémière aliquote, &

celle du ſecond conſéquent doit être priſe autant de fois qu'il y a d'unités au prémier pour faire la grandeur entiére ; donc il eſt démontré que le produit des conſéquents marquera en combien de parties la grandeur entiére a été diviſée ; il s'agit de prouver la même choſe à l'égard du produit des antécedents, & il faut remarquer que le nombre qui exprime le prémier antécedent, eſt celui des prémiéres aliquotes de la grandeur donnée, dont chacune eſt diviſée par le ſecond conſéquent, ce qui fait un nombre de ſecondes aliquotes égal à celui des unités du prémier antécedent, lequel nombre eſt pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond antécedent, donc le produit des antécedents marque combien on prend de ces aliquotes de la grandeur entiére que repréſente l'unité du produit des conſéquents ; ainſi ces deux produits ſont en raiſon compoſée des deux raiſons multiples de quelque maniére qu'elles s'expriment comme $\frac{10}{5}$ & $\frac{12}{2}$ ou $\frac{7}{1}$ & $\frac{2}{1}$ &c.

NEANDER. Mais comment prouveriés-vous que celui qui diviſe un tout en un certain nombre de parties égales, diviſe auſſi chaque partie de ce tout par le même nombre ? MA-

MATHESIUS. Nous l'avons déja vû auparavant, car c'eſt en vertu de cette propoſition, que la partie aliquote d'un multinome eſt égale à la ſomme de toutes les mêmes aliquotes de chacun des termes de ce multinome, comme par exemple je diviſe 100 en 4 parties, je dis que la vingtiéme partie de 100 eſt auſſi diviſée en 4 parties, car ces quotients partiaux de la vingtiéme par 4, ſont le quotient de 100 diviſé par 4, puiſque le quart de 100, c'eſt les quarts de toutes les vingtiémes, de toutes les trentiémes &c. du multinome cent. Mais pour en venir à nos raiſons, examinons en quatriéme lieu le cas où l'on a deux raiſons ſousmultiples $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{20}$ la cinquiéme de la grandeur donnée eſt diviſée en 20 parties égales, & l'on en prend une, c'eſt-à-dire, que le produit des conſéquents exprime le nombre des aliquotes de la grandeur & le produit des deux antécédents $1 \times 1$, qui marque que l'on ne prend qu'une centiéme du tout; ſi les raiſons ſont $\frac{2}{6}$ & $\frac{8}{16}$ le tout eſt diviſé en 6 parties, j'en prends 2, je diviſe chacune de ces ſixiémes en 16 parties, ainſi on a $\frac{2}{96}$, & l'on doit prendre 8 fois.

fois $\frac{2}{96}$, la partie aliquote $\frac{1}{96}$ étoit déja prise deux fois, il faut donc la prendre 16 fois & l'on a ainsi le produit des antécedents $\frac{16}{96}$. 5° Deux raisons numeriques comme $\frac{4}{5}$ & $\frac{8}{7}$: je divise quatre cinquiémes de ma grandeur qui sont les prémières aliquotes en 7 parties, & comme chaque cinquiéme est divisée en 7 parties, j'ai pour secondes aliquotes & pour quotient de quatre cinquiémes divisées par 7, quatre trente-cinquiémes du tout, que je dois prendre 8 fois, c'est-à-dire $\frac{32}{35}$. 6° Une raison multiple & une sousmultiple $\frac{1}{7}, \frac{7}{1}$; la septiéme partie d'une grandeur est prise sept fois, donc la grandeur demeure la même; le produit des conséquents c'est le conséquent de la prémière raison, & le produit des antécedents l'antécedent de la seconde: dans le conséquent on divise la grandeur, dans l'antécedent on multiplie le quotient, ainsi les deux produits des antécedents & des conséquents expriment la valeur de la raison composée d'une raison multiple & sousmultiple. 7° Une raison multiple & une numerique $\frac{9}{1}$ & $\frac{12}{10}$. une grandeur prise 9 fois est divisée en 10 parties égales, donc chaque grandeur est

eſt divisée auſſi en 10 parties & neuf dixiémes de la grandeur, c'eſt la dixiéme partie de neuf fois cette même grandeur, mais il faut prendre 12 fois ces 9 dixiémes, c'eſt-à-dire $\frac{108}{10}$, & ce ſont de même le produit des antécedents & le produit des conſéquents qui expriment cette raiſon compoſée. 8° Enfin une raiſon ſousmultiple & une numerique $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$ le tiers d'une grandeur eſt diviſée par 4, on a la douziéme partie & l'on prend 3 fois cette douziéme partie, le produit des conſéquents exprime en combien de parties on diviſe la grandeur donnée, & celui des antécedents étant égal au ſecond antécedent exprime combien on en prend. Ce que je viens de dire doit s'entendre pour tous les cas poſſibles, quoique je me ſois ſervi d'exemples, car je les ai expliqué d'une maniére générale, & leur force ne dépend point de ce qu'ils ſont déterminés, mais uniquement de ce qu'ils ſont des raiſons d'une certaine eſpèce. Il n'eſt pas moins certain que quand il y auroit plus de raiſons, la raiſon compoſée a toujours pour ſes termes le produit des antécedents & celui des conſéquents.

Ainſi l'on a une méthode univerſelle pour

pour trouver la raiſon compoſée d'autant de raiſons que l'on voudra.

La multiplication des fractions n'a donc plus rien qui doive nous ſurprendre; & ſi nous voyons toujours les produits être moindres que les facteurs, cela vient de ce que la partie aliquote de la grandeur ou du tout que l'on a diviſé n'eſt pas priſe dans le numerateur autant de fois qu'il le faut pour égaler ce tout; & c'eſt par là même que l'on a une fraction; mais cette prémiére priſe moindre que la grandeur entiére eſt encore diviſée par le ſecond dénominateur, & le quotient n'eſt pas pris autant de fois qu'il le faut pour faire la quantité diviſée; elle eſt donc moindre que le prémier facteur, elle eſt moindre auſſi que le ſecond, parce que c'eſt une ſeconde diviſion; au lieu que le ſecond facteur, auſſi bien que le prémier eſt une prémiére diviſion de la grandeur entiére. Et pour aſſortir en quelque façon ce que nous venons de dire avec la multiplication générale & algébrique, il faut remarquer que le prémier facteur moindre que l'unité n'eſt pas pris ſeulement une fois, mais moins qu'une fois parce que le multipliant eſt conſideré comme une partie aliquote d'une

ne grandeur entiére. Si le multipliant eſt l'unité, & le multiplié l'unité, on a 1 : 1 = 1 : 1, ſi l'on a $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ on veut prendre trois quarts deux cinquiémes de fois; pour cela on le diviſe en 5 parties, & on en prend deux; ainſi il faut que le produit ſoit à $\frac{3}{4}$ comme $\frac{2}{5}$ eſt à l'unité. La moitié multipliée par la moitié donne un quart, parce qu'un quart eſt la moitié de la moitié, comme $\frac{1}{2}$ eſt la $\frac{1}{2}$ de l'unité, & ainſi des autres. Le quarré d'une fraction ſe trouve en multipliant une fraction par elle-même, auſſi bien que les autres puiſſances qui diminuent toujours plus à meſure qu'on les éléve à un degré plus grand, lorſque la racine eſt moindre que l'unité. Elle s'augmentent au contraire quand elle eſt plus grande, & elles reſtent avec la même valeur quand la racine vaut préciſément l'unité.

Le produit de deux raiſons égales s'appelle raiſon doublée, celui de trois triplée &c. comme $\frac{5}{6}$, & $\frac{10}{12}$, $\frac{50}{72}$ qui eſt la même choſe que $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Ainſi les facteurs peuvent être des raiſons égales ſans que les termes ſoient égaux comme dans l'exemple que nous avons apporté.

Une raiſon étant donnée, ou deux gran-

grandeurs qui ſe ſuivent immédiatement j'en interpoſe une autre quelconque, & je dis que la raiſon de la prémière grandeur à la troiſiéme, c'eſt-à-dire la raiſon prémièrement priſe eſt compoſée de la raiſon de la prémière à la ſeconde, & de celle de la ſeconde à la troiſiéme.

Car puiſque j'interpoſe une grandeur, la raiſon compoſée ſera une quantité diviſée par l'interpoſée, multipliée par la prémière, puis ce produit diviſé par la troiſiéme, & multiplié par l'interpoſée; or il faut faire voir qu'on aura la même choſe en diviſant la quantité par la troiſiéme, & la multipliant par la prémière.

Pour le comprendre faiſons attention que puiſque la grandeur ou l'unité eſt diviſée par l'interpoſée & que la partie aliquote eſt multipliée enſuite par la prémière, diviſant chacune des aliquotes que contient la prémière par la troiſiéme, le quotient ſera la ſomme de ces aliquotes diviſées par cette troiſiéme; mais cette ſomme eſt priſe autant de fois qu'il y a d'unités dans l'interpoſée, & ces parties aliquotes viennent de la quantité diviſée par l'interpoſée, donc on aura un nombre de ces grandeurs

ou

Digitized by Google

ou unités autant qu'en contient la prémière grandeur, diviſée chacune par la troiſiéme, c'eſt-à-dire l'unité diviſée par la troiſiéme grandeur & multipliée par la prémière, ce qu'il falloit démontrer.

Je vais encore vous en donner des exemples. 1° Soit 3 : 3 j'interpoſe 3 & j'ai 3. 3. 1. je dis que 3 : 3 = 3 : 3 × 3 : 3. car le tiers d'une grandeur pris trois fois, c'eſt la grandeur elle même, je la diviſe enſuite par trois, & je la prends trois fois ainſi diviſée ; j'ai encore la même valeur, donc &c. 2° 3. 7. 3. Une grandeur diviſée en 7 parties & dont je prens 3, fait 3 ſeptiémes, je diviſe chaque ſeptiéme en trois parties, & j'ai trois ſeptiémes diviſées chacune en 3 parties, je les prends ſept fois, & j'ai trois grandeurs entiéres diviſées par 3, c'eſt-à-dire la même grandeur qu'auparavant 3° 1. 2. 3. La moitié d'une grandeur eſt priſe une fois, & cette moitié eſt diviſée en 3 parties ; le tiers de la moitié eſt pris deux fois, on a donc le double des tiers de la moitié, qui pris trois fois fait le tout : on peut ainſi s'aſſurer de tous ces cas en prenant le produit des antécedents & celui des conſéquents comme nous venons de le voir. Enfin la raiſon

ſon de deux grandeurs eſt compoſée de toutes les raiſons des grandeurs interpoſées quel que puiſſe être le nombre de ces raiſons & l'eſpèce à laquelle elles appartiennent, comme ſi l'on avoit *a, b, c, d, e, f, g, h.* la raiſon de *a* à *h* eſt *a: h = a: b × b: c × c: d × d: e × e: f × f: g × g: h.* le produit des antécedents eſt *a b c d e f g*, le produit des conſéquents *b c d e f g h*, mais les grandeurs *a* & *h* ont été multipliées, chacune par celle-ci *b c d e f g h*; donc deux grandeurs ſont entr'elles en raiſon compoſée de toutes les raiſons des grandeurs interpoſées. On peut auſſi démontrer cette propoſition par la précédente, de cette maniére ſoit *a, b, c, d, e, f, g, h,* la raiſon de *a: e*, c'eſt *a: b × b: c.* la raiſon de *a: d*, c'eſt *a: b × b: c = a: c*, & on a *a: c × c: d*, donc *a: b × b: c × c: d = a: d* &c. Ainſi ſuppoſons qu'entre 2 & 3 on interpoſe un million de grandeurs, par exemple, cette raiſon de 2: 3 ſera compoſée de million & une raiſon toutes multipliées les unes par les autres; car on a toujours autant de grandeurs compoſantes plus une, qu'il y a de grandeurs interpoſées entre les termes d'une raiſon donnée. C'eſt de cette maniére que dans les raiſons compoſées la gran-

randeur qu'on avoit prémièrement prise
transforme continuellement, & de-
ient tantôt égale, plus grande, plus
etite, multiple, ou aliquote de ce qu'el-
étoit auparavant.

Je vais vous donner encore quelques
xemples sur la multiplication des frac-
ons sur laquelle vous devés vous atta-
her principalement. J'ai $3 \times \frac{2}{5}$ à multi-
lier par 20; je veux prendre $3 \times \frac{2}{5}$ 20
ois, je prends donc prémièrement 3, 20
ois, & j'ai 60, or $\frac{2}{5} \times$ 20 c'est 20 fois
eux cinquiémes, c'est-à-dire, quarante
inquiémes qui font huit fois le tout, de
orte que le produit total est 68. De
ême ayant à multiplier 20 par $3 \times \frac{2}{5}$
e prémier produit est 60, & de 20 j'en
lois prendre deux cinquiémes, la $\frac{1}{5}$ c'est
, j'ai donc $2 \times 4 = 8$ & j'ai encore
8, ayant $60 \times \frac{2}{5}$ & $4 \times \frac{3}{4}$ pour facteurs,
non produit sera d'abord $60 \times 4$ c'est-
-dire 240 & les $\frac{3}{4}$ de 60 savoir 45 ce
ui fait 285; mais il me faut encore pren-
re l'autre partie du multiplié quatre fois
$\frac{3}{4}$; or quatre fois les deux tiers c'est
uit tiers, ou deux unités, & deux tiers,
avec cela les trois quarts de deux tiers;
e quart du tiers, c'est la douziéme du
tout,

tout, le quart de deux tiers c'eſt la ſixiéme, on a donc 3 ſixiémes ou la moitié du tout; ce qui joint à la prémiére fraction 2 tiers, donne l'unité & la moitié du tiers, (car la moitié c'eſt un tiers & demi) en tout $240 + 45 + 2 + 1 + \frac{1}{6} = 288 + \frac{1}{6}$. En faiſant l'opération ordinaire, j'aurois reduit $60 + \frac{2}{3}$ en $\frac{182}{3}$ & $4 \times \frac{3}{4}$ en $\frac{19}{4}$ j'aurois enſuite multiplié 182 par 19 qui donnent 3458 produit des antécedents & $3 \times 4 = 12$ produit des conſéquents, diviſant ces deux produits l'un par l'autre, le quotient eſt 288 & deux douziémes qui font une ſixiéme, comme il le falloit.

Il me reſte à vous prouver ſur les raiſons compoſées, que dans la multiplication des raiſons, l'ordre des raiſons compoſantes ne change point la valeur des compoſées. On peut le montrer parce que nous avons déja fait voir auparavant, que l'ordre des facteurs dans la multiplication ne change pas le produit, car les raiſons ſont des grandeurs, & puiſqu'on les multiplie, dans quelqu'ordre qu'on les arrange, le produit doit toujours être le même; mais il vaut mieux le prouver d'une autre maniére, parce

ırce que tout le monde ne s'accommo-
eroit pas de ces ſortes de démonſtra-
ons. Ceci eſt clair dans les raiſons
'égalité, & pour ce prémier cas je
ıe diſpenſe de le prouver. 2° Dans les
ıiſons multiples nous l'avons déja vû;
ır les raiſons multiples ſont des nom-
res, & c'eſt à l'égard des nombres que
ous l'avons démontré. 3° Dans les rai-
ons ſousmultiples, prenés $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{12}$ il faut
rouver que la douziéme d'un tiers, eſt la
ième choſe que le tiers d'une douziéme.
a douziéme d'un tiers c'eſt une tren-
e ſixiéme, car il faudra prendre cette
artie douze fois pour faire un tiers, &
rois fois douze fois pour faire le tout;
r la grandeur donnée eſt diviſée en dou-
e parties qu'il faut prendre trois fois,
uiſque chaque douziéme priſe trois fois
ait le tout, donc la douziéme du tiers
'eſt le tiers de la douziéme, ce qu'il fal-
oit démontrer. 4° Dans les raiſons nu-
neriques l'on a $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, il faut que les
leux tiers de trois quarts faſſent les trois
uarts de deux tiers: le tiers du quart
'eſt une douziéme, les deux tiers d'un
uart c'eſt deux douziémes, donc les
leux tiers de trois quarts, c'eſt 6 dou-
ziémes

ziémes c'eſt la moitié du tout ; de même, le quart du tiers, c'eſt une douziéme, les huits quarts du tiers c'eſt trois douziémes, les huits quarts de deux tiers c'eſt 6 douziémes, c'eſt la moitié, ce qu'il falloit prouver. Et pour le dire en général, remarqués que dans les raiſons ſousmultiples, on fait une ſubdiviſion du quotient en d'autres plus petits & que ſoient données ces deux raiſons $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{b}$ le ſecond conſéquent marque combien il faut des plus petites aliquotes $\frac{1}{ab}$ pour faire l'unité du prémier conſéquent, parce que chaque unité de $a$ eſt diviſée par $b$ : de même je diviſe cette grandeur d'abord par le ſecond conſéquent & enſuite par le prémier ; pour avoir donc l'unité du ſecond, il faut prendre toutes celles du prémier, de ſorte que le produit des conſéquents exprimera toujours la valeur de la raiſon, & comme dans la multiplication ordinaire, l'ordre des facteurs ne change pas la valeur des produits, par là même on aura $\frac{1}{ab} = \frac{1}{ba}$ &c. C'eſt ce qu'on peut auſſi remarquer dans les raiſons numeriques.

Il s'agit préſentement de vous expliquer la diviſion des raiſons, & je dis que diviſer deux raiſons, c'eſt voir combien de fois une raiſon eſt égale à l'autre; or nous avons vû que deux raiſons ſont égales quand deux grandeurs, ou deux mêmes aliquotes de chacune ſont priſes le même nombre de fois; ainſi deux raiſons étant données, on cherche combien de fois l'on peut dire que la ſeconde grandeur ou une de ſes aliquotes eſt priſe de la même maniére que la prémiére ou une de ſes mêmes aliquotes; & comme la diviſion peut ne pas être exacte, il faudra diviſer la maniére dont le ſecond antécedent contient ſon conſéquent en un certain nombre de parties égales pour en prendre une ou pluſieurs, ou pour m'exprimer d'une maniére plus ſimple, on cherche dans la diviſion de deux raiſons la raiſon qu'elles ont entr'elles, ce que l'on comprendra aiſément ſi l'on regarde les priſes de chaque raiſon comme des grandeurs abſolues; il faut donc qu'il y ait entre ces raiſons quelque homogénéité, & c'eſt ce que l'on va voir dans chaque eſpèce de raiſons. 1° Dans les raiſons d'égalité, puiſque chaque grandeur eſt priſe une fois, les maniéres de

prendre ſont les mêmes, & la raiſon d'égalité exprimera toujours la diviſion de deux raiſons égales, comme dans les grandeurs abſolues 1: 1 = 1. 2° Deux raiſons multiples étants deux grandeurs priſes chacune un certain nombre de fois, il eſt clair que les raiſons ſont comme les antécedents dès qu'on aura reduit les conſéquents à l'homogénéité en faiſant attention ſeulement aux expoſants de chacune ; ces raiſons ſont entr'elles comme les expoſants. 3° Dans les raiſons ſousmultiples, comme chaque antécedent eſt partie aliquote de ſon conſéquent, & que deux raiſons égales, lorsqu'elles ont des diviſeurs inégaux, donnent des quotients qui ſont reciproquement comme les diviſeurs ; il eſt clair que deux raiſons ſousmultiples étants données, les grandeurs ou unités diviſées égales ou inégales, n'importe, pourvû qu'on les conſidére alors comme égales & comme unités de même eſpèce, il eſt clair dis-je dans ce cas, que l'unité qui a pour diviſeur le plus grand conſéquent donne une moindre aliquote que celle qui en a un plus petit, & autant de fois que le grand quotient contiendra le petit, autant de fois la petite raiſon

ſera

sera dans la grande; c'est ce que l'on verra dans les exemples $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ le prémier quotient est au second non pas comme le diviseur 2 est à 4 mais en raison reciproque, savoir comme 4 est à 2, & parce que la prémière raison est le quart de l'unité pris deux fois, au lieu que dans l'autre il n'est pris qu'une fois, la raison $\frac{1}{2}$ est le double de celle-ci $\frac{1}{4}$, & par conséquent $\frac{1}{4}$ est la moitié de $\frac{1}{2}$; si l'on a $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ celui qui a divisé sa grandeur en 5 parties & qui en prend une, a une portion plus grande que celle qu'il a divisée en 6 parties; en prenant donc la cinquiéme de l'unité, on a pris la sixiéme & quelque chose de plus, de sorte que $\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ comme 6: 5 & $\frac{1}{6}:\frac{1}{5} = 5:6$; c'est ce que l'on apperçoit facilement, mais qu'il faudra prouver plus exactement dans la suite. 4° Dans les raisons numeriques il faut remarquer que deux choses contribuent à augmenter ou diminuer leur valeur, savoir les termes qui la composent, mais comme nous l'avons déja vû, cela se fait bien différemment, puisque l'antécedent augmentant, la raison augmente aussi, & que par contre elle diminue quand celui-là augmen-

te, & reciproquement. De là vient que pour connoitre ſi deux raiſons ſont égales ou inégales; & ſur tout pour déterminer leur raiſon, & voir ce qu'elles ſont l'une par rapport à l'autre, il faut avoir égard à l'antécedent & au conſéquent de chaque raiſon. Cela eſt ſi vrai qu'il peut arriver, & qu'il arrive même ordinairement que la raiſon qui a un plus grand conſéquent, & qui devroit valoir moins par cela même, ſera multiple de l'autre dont le conſéquent eſt plus petit, comme ſi l'on avoit $\frac{10}{2}$ & $\frac{100}{4}$ la ſeconde raiſon vaut 25 pendant que la prémière vaut 5, & par conſéquent elle eſt quintuple de cette prémière, elle vaudroit même 10 fois autant ſi les conſéquents étoient les mêmes, mais à cauſe que prenant $\frac{1}{4}$ on n'a que la moitié de $\frac{1}{2}$ prendre 100 quarts ce n'eſt que 50 moitiés, or 50 moitiés ſont à 10 moitiés comme 5 eſt à 1. C'eſt ce qui fait voir que deux raiſons numeriques ſont entr'elles en raiſon compoſée de la directe des antécedents & de l'inverſe des conſéquents; ou pour m'expliquer plus clairement, deux raiſons numeriques étants données, elles ſont entr'elles en raiſon com-

compoſée de la raiſon du prémier antécedent au ſecond, & de celle du ſecond conſéquent au prémier. 5° Si l'on compare une raiſon multiple avec une ſousmultiple comme $\frac{6}{1}$ & $\frac{1}{4}$ on verra d'abord combien de fois il faut prendre 1 pour faire 6 & enſuite combien de fois il faut prendre un quart pour faire l'unité, ces deux nombres on les multiplie l'un par l'autre, & le produit exprime la raiſon cherchée, c'eſt ainſi que $\frac{6}{1} : \frac{1}{4} = 24 : 1$; en effet celui qui prend un quart d'une grandeur, n'a que la vingt-quatriéme partie de celui qui en prend 6 entiéres. 6° Une raiſon multiple & une numerique étants données $\frac{6}{1}$ & $\frac{3}{4}$ il faut voir combien de fois 3 quarts ſe trouvent dans 6 unités, ſi c'étoit un quart il y ſeroit 24 fois, mais c'eſt trois fois plus, il n'y eſt donc que 8 fois, tiers de 24. 7° Une raiſon ſousmultiple & une numerique $\frac{1}{4}$ & $\frac{5}{6}$, ſi je n'avois qu'une ſixiéme $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 6 : 4$, mais j'ai cinq fois autant, donc $\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = 6. 20$, ou comme 3 eſt à 10, car puiſque je prends cinq fois autant, il faudra que je multiplie le conſéquent par le même nombre. Il faut après cela indiquer une méthode gé-

nérale pour diviſer toutes ſortes de raiſons, ou pour parler plus exactement pour trouver la raiſon de deux raiſons données; mais c'eſt ce que nous ferons dans la leçon ſuivante.

## *ENTRETIEN XVI.*

### MATHESIUS.

VOus ſavés où nous en reſtames il y a deux jours, ainſi j'entre d'abord en matière. Il y a deux méthodes pour la ſolution du problème dont il s'agit; l'une & l'autre ſont générales, & ne ſouffrent aucune exception, mais la ſeconde a cet avantage par deſſus la prémière, c'eſt qu'elle abrége le calcul & qu'on a plus vite fait.

Deux raiſons Géométriques étants données on cherche la raiſon qu'elles ont entr'elles; reduiſés ces deux raiſons au même conſéquent, les antécedents ſeront entr'eux comme les raiſons données, c'eſt le prémier moyen par lequel on peut ſatisfaire à la queſtion, & il n'eſt pas difficile de démontrer cette propoſition; car puiſ-

puiſque les deux conſéquents ſont les mêmes & que l'unité ſe trouve diviſée de part & d'autre en un même nombre de parties, il eſt clair que les antécedents ſeront entr'eux comme les raiſons dont ils ſont antécedents; cela eſt ſans difficulté, & nous diſpenſe d'entrer dans aucun détail à ce ſujet.

La ſeconde méthode conſiſte à prendre l'antécedent de la prémière raiſon & le conſéquent de l'autre pour produit d'une multiplication, & pour antécedent de la raiſon expoſante des deux raiſons données; on trouve enſuite le conſéquent, ſi l'on prend l'antécedent de la ſeconde, & le conſéquent de la prémière, pour facteurs d'une autre multiplication. Il s'agit de prouver que les deux produits ſont entr'eux comme les deux raiſons données, & c'eſt ce qu'il faut faire voir en particulier dans chaque eſpèce de raiſons. 1° ($a : a$) Nous avons démontré que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens dans une proportion géométrique, c'eſt-à dire dans deux raiſons égales; de ſorte qu'à cet égard il ſera vrai de dire que les termes de deux raiſons multipliés en croix comme l'on

dit vulgairement, expriment le quotient de ces deux raiſons données. 2° Dans les raiſons multiples exprimées de cette maniére $\frac{9}{1}$ & $\frac{3}{1}$ le produit des extrêmes c'eſt 9 & celui des moyens 3 (j'appellerai dans la ſuite extrêmes & moyens des deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ $a, d$ & $b, c$, que les raiſons ſoient égales ou inégales). Or le produit des extrêmes, c'eſt le prémier antécedent, & celui des moyens le ſecond, puiſque les deux conſéquents ſont l'unité, donc deux nombres 9 & 3 expriment la valeur de ces deux raiſons, que la prémière eſt le triple de l'autre, & $3:9 = \frac{3}{1}:\frac{9}{1}$, que celle-là eſt le tiers de celle-ci. 3° Dans les raiſons ſousmultiples $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{9}$ le produit des extrêmes c'eſt 9 & celui des moyens c'eſt 3, or ces deux produits, ſavoir le ſecond conſéquent & le prémier, ſont en raiſon directe avec la valeur de chaque raiſon, donc ces deux raiſons ſont entr'elles comme le produit des extrêmes à celui des moyens. 4° Dans les raiſons numeriques, multiples & ſousmultiples qui s'expriment par deux nombres de cette maniére $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

Si

Si les raiſons étoient ſousmultiples, on auroit pour expoſants le ſecond & le prémier conſéquent, mais on a pluſieurs aliquotes de $b$ & pluſieurs aliquotes de $d$, or quand on prend pluſieurs aliquotes de $b$, on fait que la prémière raiſon augmente autant de fois de toute ſa valeur que l'on a pris de ces aliquotes, & de même pour les aliquotes de $d$; cela étant puiſque $d : b$ exprime la raiſon de ces deux ſousmultiples $\frac{1}{b}$ & $\frac{1}{d}$ quand je prends 12 $b$ par exemple, je fais que $\frac{1}{b}$ vaut 12 fois autant qu'auparavant, & autant de $c$ que je prends c'eſt tout autant de fois que $\frac{1}{d}$ augmente; j'aurai donc la raiſon de celles-ci $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ en faiſant $a\,d : b\,c$, ce qu'il falloit démontrer. J'ai $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ ſuppoſons d'abord que ce ſoit $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{6}$ il eſt manifeſte qu'un tiers eſt à une ſixiéme comme 6 eſt à 3 ou comme deux eſt à l'unité; quand je prends un tiers je prends deux ſixiémes; la valeur de $\frac{2}{3}$ eſt le double de $\frac{1}{3}$, & la valeur de $\frac{5}{6}$ eſt le quintuple de $\frac{1}{6}$; mais $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3$, je double la raiſon $\frac{1}{3}$, il faut donc dou-

doubler 6, je quintuple $\frac{1}{6}$ il faut donc auſſi quintupler 3, parce que ſi la raiſon $\frac{1}{3}$ prend 6 là où $\frac{1}{6}$ prend 3, $\frac{2}{3}$ prend 12 là où $\frac{5}{6}$ prennent 15, il y a plus de ſixiémes que de troiſiémes, il y en a le double plus, & encore une ſixiéme, ainſi la raiſon $\frac{5}{6}$ vaut $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{6}$ qui eſt le quart de $\frac{2}{3}$ ou de $\frac{4}{6}$, & en effet 15: 12 eſt une raiſon qui contient la grandeur entiére plus le quart, c'eſt-à-dire cinq quarts, donc $\frac{2}{3}$ ſont les quatre cinquiémes de $\frac{5}{6}$. Prenons $\frac{10}{9}$ & $\frac{9}{10}$, le produit des extrêmes c'eſt 100, & celui des moyens 81, on a $\frac{100}{81}$; là où la prémiére raiſon prend 100 aliquotes, la ſeconde n'en prend que 81; elle contient 10 neuviémes, ſi je veux donc voir combien de neuviémes celle-ci doit avoir, il faut que je faſſe une règle de trois; la prémiére raiſon $\frac{10}{9}$ donne 100 là où $\frac{9}{10}$ ſeconde raiſon en donne 81, donc ſi $\frac{10}{9}$ prend 10 combien de neuviémes prendra $\frac{9}{10}$, je cherche des neuviémes, & ce nombre inconnu eſt $x$, j'ai un nombre de neuviémes qui fait 10, & je fais 10: $x ==$ : maintenant pour ranger les termes 100 & 81 qui ſont la raiſon connue,

nue, je vois que 81 aliquotes donnent moins de neuviémes que 100, que 10 viennent de 100 & $x$ de 81, la règle de trois eſt directe; ainſi l'on a $10 : x = 100 : 81$, je diviſe 810 par 100 & le quotient $8 + \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ c'eſt le nombre des neuviémes de la raiſon $\frac{10}{9}$, c'eſt-à-dire qu'elle contient 81 dixiémes de neuviémes ou $\frac{81}{90}$, il faut voir enfin ſi $\frac{81}{90} = \frac{10}{9}$, or les produits 810 & $9 \times 90$ m'aſſurent de cette égalité, donc enfin là où la prémière raiſon contient $\frac{10}{9}$ la ſeconde en contient huit & une dixiéme. 5° Ayant une raiſon multiple & une ſous-multiple comme $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{5}$ on a déja vû que $\frac{1}{1} : \frac{1}{5} = 5 : 1$, je multiplie cette prémière raiſon par 8, & j'ai 40 pour produit des extrêmes, je laiſſe ma cinquiéme telle qu'auparavant & $\frac{8}{1}$ ſe trouve quarante fois égal à $\frac{1}{5}$: l'unité contient 5 cinquiémes, & 8 en contient 40, donc la cinquiéme partie de l'unité ſe trouve une fois dans $\frac{1}{5}$ & quarante fois dans 8. 6° Une raiſon multiple avec une numerique $\frac{2}{1}$ & $\frac{2}{3}$ : ſi l'on ne fait attention qu'aux conſéquents, les raiſons ſont la prémière triple de la ſeconde.

J'ai $\frac{9}{1} : \frac{2}{3} = 3 : 1$, je fais 27 & 2, & l'exposant c'est $\frac{27}{2}$, mais ce sont les produits des extrêmes & des moyens, donc &c. 7° Enfin une raison sousmultiple avec une numerique $\frac{1}{9}$ & $\frac{7}{8}$, les raisons sont d'abord comme 8 : 9, l'antécedent de la seconde est augmenté de 6 fois sa valeur, ainsi 8 : 9, est changé en 8 : 63. De là je conclus que dans toutes sortes de raisons on pourra connoitre celles qu'elles ont entr'elles par la méthode que je viens d'indiquer.

L'usage de la division des raisons est très grand, & d'autant plus qu'il est difficile de connoitre d'abord si deux raisons sont égales ou inégales, au moins quand elles sont numeriques, & dans certains cas, au lieu que dans les grandeurs absolues on l'apperçoit toujours d'une prémière vûe. Par exemple il n'y a personne qui ne sache que 3 est plus petit que 4, mais on peut être embarassé à répondre quand on demande si $\frac{2}{3}$ est plus grand égal ou plus petit que $\frac{3}{4}$, on n'a pour le connoitre qu'à prendre les produits $2 \times 4$ & $3 \times 3$ on verra que ces deux raisons sont entr'elles comme 8 : 9, & que par conséquent $\frac{2}{3}$ est



Digitized by Google

un peu moindre que $\frac{3}{4}$. Il eſt vrai que dans d'autres cas il eſt plus aiſé de l'appercevoir comme dans ceux-ci $\frac{3}{9}$ & $\frac{12}{36}$ $\frac{5}{1}$ & $\frac{1}{4}$ $\frac{60}{2}$ & $\frac{4}{5}$ &c.

Après vous avoir expliqué les quatre opérations qu'on fait ſur les raiſons comme ſur les grandeurs abſolues, il faut encore examiner particuliérement cette règle où trois raiſons étants données, on cherche une quatriéme qui ſoit proportionnelle à celle que l'on a déja.

Il eſt à remarquer que dans une règle de trois on a ou trois entiers, ou trois fractions, ou entiers & fractions, nous avons expliqué le prémier cas, il nous reſte à parler des deux autres; or il n'eſt pas difficile de reſoudre ce problème; car prenant le produit des raiſons moyennes, & diviſant la raiſon compoſée qui en reſulte par la prémière, le quotient donnera la quatriéme raiſon, fondé ſur ce que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens dans toute proportion, & que les raiſons ſont ici regardées comme des grandeurs abſolues.

J'ai par exemple $6\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2} : x$, je diviſe $\frac{4}{10}$ par $\frac{27}{4}$ & le quotient $\frac{16}{270}$ me donne

donne le quatriéme terme ; on verra de même que le produit des raiſons $\frac{27}{4}$ & $\frac{16}{270}$ & le produit des raiſons $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{2}$ ſont égaux, car l'on a $\frac{432}{1080} = \frac{4}{10}$ or $4320 = 1080 \times 4$, j'aurois pû prendre un dénominateur commun qui fut diviſible par tous les conſéquents comme 40, & il eſt clair que $\frac{27}{4}$ ſe change en $\frac{270}{40}$, $\frac{4}{5}$ en $\frac{32}{40}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{20}{40}$ car alors toutes les aliquotes ſeront des quarantiémes, & c'eſt la même choſe que ſi l'on avoit des nombres entiers ; on cherche donc une proportion entre ces trois termes, $270 : 32 = 20$: le quotient, ou quatriéme terme c'eſt $\frac{640}{270}$ ou $\frac{64}{27}$ c'eſt-à-dire 2 quarantiémes & 6 fois la vingt-ſeptiéme partie d'une quarantiéme, c'eſt-à-dire 64 mille huitantiémes qui valent préciſément $\frac{16}{270}$. Cet exemple peut ſervir pour tous les autres, & quand on a une fois les principes d'une choſe il n'eſt pas beſoin d'y revenir inceſſamment.

Mais je dois pourtant vous entretenir un peu plus au long & en général de la règle de trois compoſée.

D'abord il faut faire attention que la quantité d'un effet dépend très ſouvent du concours de pluſieurs grandeurs qui con-

Digitized by Google

contribuent à le produire ; c'eſt ainſi qu'un ouvrage dépend du nombre des ouvriers, & du tems qu'ils emploient à y travailler ; augmentés le tems, l'ouvrage augmente, & augmentés le nombre des ouvriers, l'ouvrage devient encore plus grand. Or je vois que ces cauſes ont agi conjointément, & qu'elles ne pouvoient pas même agir l'une ſans l'autre ; en effet le temps par lui-même n'eſt pas quelque choſe de différent des ouvriers qui travaillent, & de l'ouvrage qui eſt travaillé, ce ſont les ouvriers agiſſants ſucceſſivement ; de ſorte que le double de tems produit le double d'ouvrage, & c'eſt la même choſe que ſi l'on avoit mis le double d'ouvriers ; c'eſt par cette raiſon que ſi l'ouvrage étoit 1, le tems 1, & le nombre des ouvriers 1, que l'on faſſe le prémier 4, & le ſecond 3, l'ouvrage ſera 12, ſavoir $3 \times 4$. Ce qui revient à ceci, un nombre d'ouvriers a fait tant d'ouvrage pendant 2 heures, je prends 3 fois ce nombre d'ouvriers & j'ai 3 fois plus d'ouvrage ; mais le tems augmente de trois fois ſa valeur, c'eſt comme ſi le triple des ouvriers augmentoit auſſi, c'eſt-à-dire comme s'il y en avoit douze fois autant

tant qu'auparavant. On trouve encore une raiſon compoſée dans les eſpaces parcourus, parce qu'ils dépendent des viteſſes & des tems que les mobiles demeurent à les parcourir.

On a auſſi des raiſons compoſantes directes & inverſes, parce qu'il y a certaines cauſes qui font diminuer l'effet total à meſure qu'elles augmentent, comme nous le verrons bientôt; en attendant, je vais vous donner un exemple de raiſons compoſées de compoſantes ſimples & directes. C'eſt la coûtume de payer 4 écus des marchandiſes du poids de deux cens livres qui ont été apportées de 100 lieues; on demande combien il faudra pour des marchandiſes du poids de 300 livres qui viennent de 400 lieues. J'examine d'abord à quelle eſpèce appartient la grandeur inconnue, je vois que ce ſont des écus, que 4 écus eſt un antecedent auquel je cherche un conſéquent, que 4 écus enfin réſultent de 200 livres & de 100 lieues; ſi l'on double le nombre des livres & qu'il y ait le même chemin, il faut doubler le nombre des écus, ſi l'on prend un chemin 3 fois plus long, & que le nombre des lieues ſoit le même, le nombre des écus devient le triple de

ce

ce qu'il étoit auparavant; que si l'on quatruple le nombre des lieues & que l'on triple celui du poids, on devra payer 4 fois autant à cause du chemin, & comme le triple du chemin a été parcouru par le multiple du poids, le quatruple du payement doit encore être triplé, c'est-à-dire que l'on doit payer douze fois autant que la prémière.

Je veux voir ce que les 4 écus deviendront en passant par la raison composée; or comme 4 écus viennent de ces deux termes 200 livres, & 100 lieues, ce feront les conséquents des raisons, 300 : 200 = 3 : 2, & 400 : 100 = 4 : 1. le poids a été augmenté de la moitié, c'est pourquoi je divise 4 écus en 2 parties, & j'en prends 3 ce qui fait 6 écus, voilà la prémière transformation; maintenant ces 6 écus sont divisés par l'unité, & pris 4 fois, ce qui fait 24 écus; en effet le poids a augmenté de la moitié de sa valeur, on doit donc payer la moitié de plus, c'est-à-dire 6, & le chemin étoit 4 fois aussi long, le poids entier est aussi augmenté ayant parcouru tout ce chemin, de sorte que l'on a dû donner 4 fois 4 écus, & 4 fois la moitié, c'est-à-dire 16 + 8.

On

On peut resoudre toutes ces questions par deux voyes générales, la prémière, c'est de se servir de plusieurs règles de trois consécutives, & l'autre c'est la méthode des raisons composées.

Quand on a un problème de raisons composées, il faut 1° s'assurer si c'en est un, ce qui n'est pas difficile, n'y ayant pour cela qu'à faire attention si la quantité de la grandeur connue, & dont on en cherche une de la même espèce, dépend de celle de plusieurs autres grandeurs. 2° On doit prendre la grandeur connue & homogéne à celle que l'on cherche pour antécedent de la raison inconnue $a : x$. 3° Il faut voir si la grandeur qui influe sur la quantité $a$ venant à augmenter, cette quantité $a$ augmente pareillement, & prenant ainsi successivement toutes les grandeurs on verra si les raisons composantes sont directes ou inverses ; ou si l'on veut il n'y a qu'à commencer par quelle que l'on voudra indifféremment, & après s'être assuré si elle est directe ou inverse, on verra par une règle de trois simple ce qui doit resulter par rapport à la grandeur $a$ de l'augmentation ou diminution arrivée à cette quantité que l'on examine, lequel chan-

Digitized by Google

changement la doit rendre égale à celle qui étant de même eſpèce, influe ſur celle que l'on cherche $x$, enſuite cette partie de l'inconnue totale $x$ il faut la prendre pour antécedent de la raiſon inconnue, & ſi c'eſt $b$ on aura $b : x$; je fais une ſeconde opération & ſachant la valeur d'une autre quantité qui influe ſur $b$ auparavant inconnu (car $x$ change de valeur à chaque opération & ces $x$ deviennent ſucceſſivement $b$, $c$, $d$ &c.) ſachant, dis-je, quelle eſt cette grandeur, je vois ſi elle a avec $b$ une raiſon directe ou inverſe, & opérant de la même maniére, je change $b$ en $c$ faiſant cette règle de trois autant de fois qu'il y a de grandeurs qui influent ſur l'antécedent de la raiſon connue; enfin le quatriéme terme de la derniére règle donne la grandeur que l'on cherche.

Maintenant pour faire une application de quelques cas particuliers de la méthode que je viens de vous indiquer, ſuppoſons prémièrement qu'un mobile parcoure 12 toiſes avec 10 dégrés de viteſſe dans 30 heures de tems, on demande dans combien de tems un autre mobile ſemblable aura parcouru 6 toiſes avec 5 degrés de viteſſe. 1° Je cherche un nom-

nombre d'heures, ce nombre dépend de la viteſſe & des eſpaces parcourus, c'eſt donc une raiſon compoſée. 2° Je cherche un conſéquent à 30 heures antécedent de la raiſon inconnue 30 : x. 3° Je vois que 30 heures viennent de 12 toiſes, & par là-même 6 toiſes donnent la moitié de ce nombre, de ſorte que la prémière raiſon eſt directe, puiſque l'on aura 15 : x; alors le précedent x étoit 15 & comme il eſt connu, x change de valeur, je vois donc en ſecond lieu que ces 15 heures augmentent à meſure que la viteſſe du mobile diminue: or la viteſſe eſt diviſée par 2, donc le nombre des heures 15 eſt multiplié par 2 & par conſéquent la grandeur 30 heures eſt rétablie, à cauſe que le plus eſt recompenſé par le moins; car dans le prémier mobile s'il y a plus d'eſpace à parcourir il y a plus de viteſſe, & dans le ſecond ſa lenteur ſe trouve reparée par le peu de chemin qu'il fait, & ainſi ces deux mobiles avec les viteſſes qu'on leur ſuppoſe & les eſpaces auſſi donnés employeront le même tems à parcourir l'un qu'à parcourir l'autre. Que ſi maintenant je voulois opérer par la compoſition des raiſons, je verrois prémièrement quelles ſont les raiſons

raiſons compoſantes, ce ſont ici les toiſes, & les viteſſes ; & remarquant que ſi 12 toiſes donnent 30 lieues, 6 toiſes en donneront moins, j'ai la raiſon directe 12 : 6 = 2 : 1. après cela diſant ſi 10 de viteſſe donnent 30 lieues, 5 de viteſſe en feront davantage, je change la raiſon, & je fais au lieu de 10 : 5 = 2 : 1, 1 : 2. puis multipliant les antécedents & les conſéquents les produits 2 : 2 donnent la raiſon compoſée, ce qui fait la proportion d'égalité 2 : 2 = 30 : 30. La démonſtration de cette méthode n'eſt pas difficile ; la grandeur 30 doit être à celle que l'on cherche en raiſon compoſée de toutes les raiſons qui influent ſur 30, & par conſéquent ayant le produit des antécedents & celui des conſéquents ils ſont entr'eux comme les termes de la raiſon inconnue dont le conſéquent peut ſe connoitre par une règle de trois ſimple. Et quand aux raiſons inverſes il eſt aiſé de voir que ſi par exemple plus de viteſſe ſe trouve dans le ſecond mobile, il faudra moins de tems, en telle ſorte que le tems ſe trouve partagé en autant de parties qu'il y en a dans l'antécedent & pris autant de fois qu'il y en a dans le conſéquent ; il faut donc comme il eſt évi-

dent,

Digitized by Google

dent, changer les termes de la raiſon inverſe à moins qu'elle ne ſoit d'égalité, ce qui alors ne changeroit point la valeur; mais ſi la raiſon inverſe étoit multiple, parce que la grandeur qui paſſe ſucceſſivement par divers états doit venir ſousmultiple de ce qu'elle étoit auparavant, il faudra qu'elle ſoit diviſée en autant de parties que l'antécedent renferme de conſéquents & qu'on en prenne une; ſi elle eſt ſousmultiple, il faudra qu'elle devienne multiple, ſi elle eſt numerique de plus grande inégalité, elle deviendra numerique de moindre inégalité.

Vous pouvés voir quelle de ces deux méthodes vous trouvés le plus à votre goût; l'une & l'autre ſont également ſûres & immanquables, comme vous devés l'avoir remarqué, mais pour connoitre quelle eſt la plus facile & la plus naturelle il faut en faire l'application aux mêmes exemples. Je paſſe ici ſous ſilence la règle de compagnie compoſée, la règle de deux fauſſes poſitions, la règle d'alliage & quelques autres de cette nature, parce que je vous en ai déja donné les principes, de ſorte que toute la difficulté ne conſiſte que dans l'application qu'on en peut faire à des cas déterminés, & qui don-

donne quelquefois assés d'embarras surtout aux commençants, mais il vaut incomparablement mieux qu'ils viennent à bout, quoi qu'avec plus de peine, de découvrir d'eux-mêmes les raisons de ce qu'on enseigne dans l'Arithmétique pratique, que de ne leur laisser rien à chercher; & de leur mettre pour ainsi dire tout devant les yeux. Quand on a connu une fois ce que sont les Mathématiques, qu'on les a envisagées dans leur véritable point de vûe, & qu'enfin on les étudie avec les précautions que je vous ai indiquées, on vient aisément à bout de trouver & d'établir des règles générales sur les divers cas qui se présentent; cela étant, & pour d'autres raisons encore que vous devés aisément comprendre, je me dispense d'entrer dans cette espèce de détail par rapport aux règles dont je vous ai parlé: mais avant que d'achever cette matière, j'ai encore à examiner quelques propositions sur les grandeurs composées & sur la méthode de trouver le plus grand commun diviseur de deux grandeurs données. La prémière est celle-ci, *les plans sont les uns aux autres en raison composée de celles de leurs racines.* Cela veut dire que deux produits dépendent de la valeur des mul-

multipliés & des multipliants: ſuppoſons d'abord pour cela que l'on ait les deux facteurs d'une multiplication, ſi l'on change le multiplié, le produit changera auſſi de la même maniére; ſi l'on augmente le multiplicateur le produit deviendra plus grand, & le multiplié déja augmenté ſera pris plus de fois qu'auparavant, & c'eſt cette double augmentation qui fait que les nouveaux facteurs font un ſecond produit qui eſt au prémier en raiſon compoſée de celle des multipliés & des multipliants; comme par exemple ayant 3 & 4 le produit eſt 12, je prends pour nouveaux facteurs 5 & 6 & les produits 12, 30 ſeront entr'eux en raiſon compoſée de celles-ci 3 : 5 & 4 : 6; car ayant 3 & 4 pour facteurs de la prémière multiplication, je les change en ceux-ci 5 & 6; de ſorte que le produit nouveau ſera augmenté de deux tiers par le multiplié nouveau, & $\frac{2}{4}$ ou la moitié d'augmentation dans le nouveau multipliant fera la moitié du produit déja augmenté ſavoir 12 & 2 tiers de douze, ce qui donne en tout, 1° la valeur 12 du produit précedent, 2° les deux tiers de 12. 3° la moitié de 12, & 4° la moitié des deux tiers de 12, c'eſt-à-dire que le ſecond produit

ſera

Digitized by Google

ſera deux fois & demi égal au prémier, & en valeur abſolue on aura 12 + 8 + 6 + 4 = 30. En ſecond lieu, ſoit 12 & 4 facteurs du produit 48, & 3, 16 facteurs du même produit. Je dis que ſi l'on change les facteurs 12 & 4 en ceux-ci 3 & 16 le même produit demeure. Car j'ôte du multiplié 12, 8 douziémes, ce qui retranche 8 douziémes du produit, c'eſt-à-dire les deux tiers, & par conſéquent 48 eſt reduit à 16; mais par contre, j'augmente 4 de 12 quarts ou du triple de ſa valeur, ainſi le produit eſt trois fois 16, c'eſt-à dire 48, de ſorte que l'égalité ſubſiſte. Voilà un moyen de comprendre avec plus de clarté encore, la démonſtration que nous avons donnée de ce Théorème. Que dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal à celui des moiens.

De cette propoſition il ſuit manifeſtement que les quarrés ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs Racines; car quelque que puiſſe être la raiſon des deux Racines, la plus grande ſera priſe non ſeulement autant de fois que la plus petite, mais encore davantage à proportion qu'elle eſt plus grande; en effet ſoient ces deux quarrés *aa* & *bb*,

la raiſon des Racines $a : b$ étant doublée, on a les quarrés, $a\,a$, & $bb$.

Il en eſt de même des ſolides, des cubes, des quarrés de quarrés qui ſont en raiſon doublée, triplée, quatruplée &c. de toutes celles de leurs Racines.

Lorſque des grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrés, leurs cubes, & leurs autres puiſſances ſont auſſi proportionnelles; & reciproquement, comme il eſt aiſé de le voir.

Dans toute proportion Géométrique, le produit des antécedents eſt au produit des conſéquents, comme le quarré de l'antécedent eſt au quarré du conſéquent dans l'une ou l'autre raiſon. Le produit des antécedents eſt au produit des conſéquents en raiſon compoſée des deux qui ſont la proportion, & comme elles ſont égales, c'eſt une raiſon doublée; mais les deux quarrés des termes d'une raiſon ſont en raiſon doublée de cette raiſon; donc la raiſon de ces deux quarrés eſt la même que celle du produit des antécedents au produit des conſéquents.

Dans une proportion de quatre termes le produit des moyens ou des extrêmes eſt moyen proportionnel entre le produit des antécedents & celui des conſéquents.

Mul-

Multipliant chaque terme de la prémière raiſon par le ſecond antécedent, les produits ſeront entr'eux comme ils étoient auparavant; de même multipliant chacun des termes de la ſeconde raiſon par le conſéquent de la prémière, les produits auront une raiſon égale à la prémière ou à la ſeconde; on aura donc, le produit du prémier antécedent par le ſecond, eſt au produit du prémier conſéquent par le prémier des antécedents, comme le produit des moyens ou des extrêmes, comme le produit du ſecond antécedent par le prémier conſéquent qui eſt le même, eſt au produit du ſecond conſéquent par le prémier. Donc, & c'eſt ce qu'il falloit démontrer, le produit des extrêmes ou des moyens eſt un moyen proportionnel entre le produit des antécedents, & celui des conſéquents. Je ne parlerai point non plus ici de pluſieurs autres Théorêmes qui ſuivent des raiſons compoſées & de la nature des proportions Géométriques; & par conſéquent, je dois vous parler maintenant de la méthode de trouver le plus grand commun diviſeur qui eſt d'un ſi grand uſage dans le calcul des fractions & des raiſons en général.

Par commun diviſeur j'entends la plus grande partie aliquote que l'on puiſſe trouver dans une raiſon exprimée de cette façon $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{1}$, $\frac{a}{b}$ & qui meſure exactement l'une & l'autre grandeur, je dis dans des raiſons déja exprimées par des nombres ; car deux quantités étant conſidérées *in abſtracto* comme l'on parle, on peut y aſſigner autant d'unités que l'on voudra ; on ne peut donc pas dire quelle eſt la plus grande commune meſure de deux grandeurs indéterminées, ſi on ne les regarde comme des nombres ; or les unités de ces nombres ſont les plus petites aliquotes dont on conçoit que ces grandeurs ſoient compoſées, on prendra donc pour plus grande commune meſure le plus grand nombre qui diviſe exactement chacun des termes de la raiſon donnée ; c'eſt ce que l'on exécute par deux voyes différentes que je vais vous expliquer, l'une ſe fait par la ſouſtraction, l'autre par la diviſion.

Deux grandeurs ſont égales ou inégales, leur raiſon s'exprime par deux nombres ou par l'unité & un nombre. Si elles ſont toutes deux égales, il eſt clair que la plus grande commune meſure de

*a :*

$a : a$ c'eſt $a$ lui-même qui pris une fois égale chacun des termes de la raiſon d'égalité; que la raiſon ſoit multiple ou ſous-multiple $\frac{a}{1}$ ou $\frac{1}{a}$, le conſéquent dans le prémier cas, l'antécedent dans le ſecond donneront le plus grand commun diviſeur ; car il ne peut pas être plus grand qu'un terme de la raiſon propoſée ; & un diviſeur ne peut être pris moins d'une fois, pour égaler ſon dividende en le diviſant exactement. Il ne s'agit donc proprement ici que des raiſons multiples, ſousmultiples & numeriques qui s'expriment par deux nombres, & encore ne s'agira-t-il que des numeriques, ſi l'on fait attention que les deux autres eſpèces peuvent être aiſément reduites à leurs plus petits termes par le moyen du plus grand commun diviſeur, en diviſant le plus grand nombre par le plus petit, car toutes les fois qu'on aura $\frac{a}{ab}$ ou $\frac{ab}{a}$ le plus grand diviſeur ſera $a$ dans l'une & l'autre raiſon.

Soient donc donnés deux nombres inégaux, nombres de même eſpèce & dont l'un ne ſoit pas multiple de l'autre, j'ôte le plus petit du plus grand, & le

reſte ſera aliquote du plus petit ou ne le ſera pas. Le reſte étant aliquote du plus petit le ſera auſſi du plus grand ; c'eſt donc un diviſeur commun de $\frac{a}{b}$ c'eſt encore le plus grand commun diviſeur, car s'il y en avoit un plus grand il ne meſureroit pas exactement les deux nombres propoſés, puiſque devant être pris au moins une fois de plus dans la plus grande que dans la plus petite, on auroit alors la plus petite, la différence, & quelque choſe de plus encore, c'eſt-à-dire qu'elle ſurpaſſeroit la plus grande, & par conſéquent ce ne ſeroit pas un diviſeur exact.

Enfin ce nombre que l'on ſuppoſe s'il eſt égal ou plus petit il pourra bien être commun diviſeur, mais non pas le plus grand. On a donc démontré pour ce prémier cas, que ſi $a - b = m$ eſt aliquote de $b$, il l'eſt auſſi de $a$ & que c'eſt la plus grande commune meſure de $a$ & de $b$ ; c'eſt ce qui a encore lieu quand $a - b = m$ eſt aliquote de $a$ car pris une fois de moins, l'on a $b$ & ſi l'on avoit un plus grand commun diviſeur que $m$, il faudroit qu'étant ôté une fois pour le moins il donnat la plus petite, mais com-

comme il eſt plus grand que la différence, on auroit une grandeur moindre que *b*, donc &c.

Pour le ſecond cas ſi $a - b = m$, ne diviſe pas exactement *b*, il faut prendre le plus petit terme de la raiſon & la différence pour ôter le plus petit du plus grand, obſervant ſi le ſecond reſte eſt aliquote, ou non, des deux grandeurs qui ont ſervi à la ſouſtraction; s'il ne l'eſt pas, on prendra le plus petit terme de la ſeconde ſouſtraction & le ſecond reſte pour faire une troiſiéme ſouſtraction, dont le reſte ſera pris de la même maniére que les autres, juſques-à-ce que l'on trouve un reſte qui ſoit aliquote des deux quantités de la derniére ſouſtraction dont il eſt le reſultat; il faut prouver que ce reſte ſera le plus grand commun diviſeur des termes de la raiſon donnée.

Et d'abord je dois faire voir qu'après pluſieurs opérations de cette on doit néceſſairement parvenir à un reſte qui ſoit aliquote des deux grandeurs données. En effet on retranche toujours le plus petit nombre du plus grand, & cela ſucceſſivement, de ſorte que le reſte ne peut de moins que de parvenir à l'unité qui eſt aliquote de tous les nombres;

donc, & ce qu'il falloit faire voir, on parviendra &c.

Je vais démontrer à préſent que ce ſera le plus grand commun diviſeur; c'eſt prémiérement un commun diviſeur, & je le prouve ainſi: le dernier reſte eſt aliquote par la ſuppoſition des deux grandeurs de la derniére ſouſtraction, c'eſt-à-dire du reſte & du plus petit terme de la pénultiéme, il l'eſt donc de la plus grande; il eſt aliquote des deux termes de la ſouſtraction pénultiéme, & ce ſont le reſte & le plus petit terme de l'antépénultiéme, ce même dernier reſte l'eſt auſſi du plus grand terme; il eſt aliquote des deux termes de l'antépénultiéme, donc il l'eſt des deux de la derniére moins trois, juſques à la prémière, & ce ſont les termes de la raiſon donnée. Vous voyés par là que c'eſt un commun diviſeur; prouvons enſuite que c'eſt le plus grand de tous; pour le ſentir, ſuppoſons en un qui ſoit plus grand que le reſte dont nous parlons; il meſure exactement les deux termes de la raiſon donnée, il meſure donc la différence de ces deux, il meſure par conſéquent les deux termes de la ſeconde ſouſtraction, il meſure encore leur différence, donc il meſure les deux ter-

termes de la troiſiéme & leur différence, donc les deux termes de la quatriéme & leur différence, donc les deux termes de la cinquiéme & leur différence, juſques à la prémière, où il meſure le reſte dont nous parlions; il eſt donc plus petit, & la ſuppoſition impoſſible.

Ainſi ce reſte eſt le plus grand commun diviſeur des deux grandeurs données : nous verrons dans une prochaine ſéance quelle eſt la méthode qui s'exécute par voye de diviſion, car je n'ai pas le loiſir de vous l'expliquer préſentement.

---

## *ENTRETIEN XVII.*

### MATHESIUS.

LA ſeconde méthode dont on peut ſe ſervir pour trouver le plus grand commun diviſeur de deux grandeurs données, s'exécute comme nous l'avons déja dit par le moyen de la diviſion, & elle ſe fonde principalement ſur ces trois propoſitions évidentes. 1° Une grandeur aliquote d'un tout, l'eſt de chacun des multiples de ce même tout. 2° Un Binome

étant donné, si une grandeur le mesure, & un de ses termes, elle mesure aussi l'autre exactement. 3° Enfin si une grandeur mesure chaque terme d'un multinome, elle est aliquote du multinome tout entier. Cela étant, je vais expliquer en quoi consiste cette opération.

Deux grandeurs ( exprimées par des nombres de même genre, nombres inégaux, & dont l'un ne soit pas multiple de l'autre, ce qui est le seul cas où il y ait besoin d'une règle particuliére ) étants données, je divise le plus grand nombre par le plus petit, le quotient ne peut pas être moindre que l'unité; mais sans faire attention à la valeur de ce quotient, il n'y a qu'à voir si la division est exacte ou si elle ne l'est pas; elle ne peut l'être dans la prémière opération, comme il est évident; c'est pourquoi on divisera le diviseur plus grand que le reste par ce reste là, & si la division n'est pas exacte, on fera une troisiéme division avec le diviseur & le reste de la précedente jusques-à-ce que l'on soit parvenu à une division exacte; je dis que le diviseur de cette derniére opération sera le plus grand commun diviseur. 1° Ce sera un diviseur commun, car il se mesure lui même, il divise son

ſon dividende par la ſuppoſition : mais le diviſeur & le dividende de la derniére opération ſont le reſte & le diviſeur de la précedente, comme on le ſuppoſe encore, donc le dernier diviſeur meſure le produit du diviſeur de la précédente diviſion par le quotient (1) il meſure le reſte de cette même diviſion, & ces deux grandeurs priſes enſemble ſont le dividende, donc il meſure le dividende (3). Le dernier diviſeur que j'appellerai *m* diviſera donc le dividende & le diviſeur de la pénultiéme diviſion, qui ſont le diviſeur & le reſte de l'antépénultiéme ; il meſure le multiple du diviſeur, & le reſte égaux enſemble au dividende, donc *m* diviſe le dividende & le diviſeur de l'antépénultiéme; par la même raiſon *m* meſure le diviſeur & le reſte de la derniére diviſion moins trois, donc auſſi les deux termes de la derniére moins quatre, juſques-à-ce que l'on ſoit venu à la prémiére diviſion ; ainſi *m* dernier diviſeur eſt déja commune meſure. 2° Il faut prouver que l'on a la plus grande commune meſure ; car ſi cela n'eſt pas, ſuppoſons que *x* ſoit cette plus grande commune meſure : elle diviſe les deux grandeurs données, elle diviſe la plus petite multipliée par ſon quotient (1) &

par conſéquent auſſi le reſte (2) elle meſure donc les deux termes de la ſeconde diviſion, dont le plus petit eſt dividende, & le reſte diviſeur de la troiſiéme diviſion, & ainſi ſucceſſivement juſques à la derniére diviſion, ou x devroit meſurer les deux termes de cette diviſion; or la grandeur qui meſure eſt plus petite que la grandeur meſurée, & puiſque x meſure *m* ce n'eſt pas le plus grand commun diviſeur; donc en ſuivant cette méthode on trouvera toujours la plus grande commune meſure de deux grandeurs données. Il eſt évident encore que l'on parviendra toujours à l'unité, & que l'on n'arrivera jamais à zero, ni à un nombre rompu, dans cette opération; parce que l'on prend toujours le reſte d'une diviſion inexacte pour diviſeur de la ſuivante, & ce reſte c'eſt un nombre ou l'unité; ainſi dans tous les cas on trouvera le plus grand commun diviſeur exprimé par l'unité ou un nombre.

NEANDER. Quelle de ces deux méthodes vous paroit la meilleure?

MATHESIUS. Je les trouve également ſûres, & auſſi convaincantes l'une que l'autre; mais la prémière me paroit être plus naturelle & plus aiſée à compren-

dre

dre que la seconde, qui à son tour a l'avantage d'être plus commode dans la pratique, parce qu'il faut bien souvent dans la prémière, faire plus d'opérations que dans celle-ci.

NEANDER. Mais la soustraction n'est-elle pas plus aisée à faire que la division ?

MATHESIUS. Cela est vrai : aussi vous pouvés remarquer qu'il ne s'agit pas dans l'une & dans l'autre d'une seule opération, mais de plusieurs pour l'ordinaire, quelquefois l'on n'a pour commune mesure que l'unité, & alors il est plus embarrassant de faire un grand nombre de soustractions, surtout quand les nombres sont un peu composés ; par contre les divisions de cette nature sont assés faciles, outre cela en plus petit nombre, & se font plus agréablement qu'une longue suite de soustractions.

Les nombres qui n'ont que l'unité pour aliquote sont plus rares à mesure qu'ils viennent plus composés, parce qu'ils peuvent être multiples de plusieurs nombres, comme 60 qui est multiple de 1, de 2, de 3, &c.

L'avantage qu'il y a de trouver le plus grand commun diviseur, c'est que les deux

deux nombres donnés étants diviſés l'un & l'autre par cette même grandeur, donnent les plus petits termes qui ſoient en même raiſon que celle de ces grandeurs, ſuivant ce que nous avons vû que les plus grands diviſeurs donnoient toujours les plus petits quotients. Vous voyés bien par là que cette opération facilite extrêmement le calcul, ſurtout le calcul des fractions, quand on ſe ſert de reductions, ce qui ſe fait ſur les numerateurs & ſur les dénominateurs, & qui donneroit un grand embarras quand ce ſont des nombres conſiderables; car par exemple, ſi j'avois mon conſéquent diviſé en un million de parties, & que j'en pris deux cents mille, il eſt clair que c'eſt la même choſe que ſi je l'avois diviſé en cinq parties pour en prendre une, puiſque 200 milles eſt la $\frac{1}{5}$ de 1000000; or pour exprimer la raiſon de la partie à ſon tout, il n'eſt pas néceſſaire que je ſubdiviſe toujours ces deux grandeurs en d'autres unités plus petites. Après avoir vû la nature des raiſons Géométriques, de celles que l'on nomme proportions, & raiſons compoſées, après avoir parlé par conſéquent des fractions & de leurs proprietés, je dois paſſer aux progreſſions Géométriques,

ques, & ſans autre préambule je vais tâcher de vous en donner une idée très diſtincte.

Suppoſons un nombre indéterminé de grandeurs de même eſpèce, toutes inégales, & telles que la raiſon de la ſeconde avec la prémière ſoit la même que celle de la troiſiéme à la ſeconde, de la quatriéme à la troiſiéme, & ainſi de ſuite juſques à la derniére, cette ſuite de grandeurs conçue dans un tel ordre s'appelle progreſſion Géométrique. De cette définition ſuit néceſſairement, 1° que deux termes conſécutifs d'une progreſſion ſont en même raiſon avec deux autres auſſi conſécutifs pris de la même maniére, c'eſt-à-dire, ſoit en montant ou ſoit en deſcendant; car deux termes étants en même raiſon, avec deux autres termes, en faiſant *invertendo*, c'eſt-à-dire, en les prenant de bas en haut, ſi on les avoit pris de haut en bas, la proportion demeure. 2° Une progreſſion Géométrique eſt une ſuitte de proportions continues, puiſque tous les termes conſécutifs ſont toujours deux raiſons égales; d'où il ſuit que chaque terme, à la reſerve du prémier, eſt antécedent d'une raiſon & conſéquent de la précédente. 3° La proportion continue

eſt

eſt en quelque façon la plus petite progreſſion Géométrique, car deux termes ſont une raiſon Géométrique, & dans une proportion continue on y remarque tout ce que nous avons dit dans la définition de progreſſion. 4° Il y a dans toute progreſſion une raiſon conſtante qui la détermine, & que l'on appelle *expoſant*. 5° Il y a autant d'eſpèces de progreſſions par rapport aux raiſons que de ſortes de raiſons, excepté celles d'égalité, car on auroit toujours la même grandeur dans chaque terme, contre la ſuppoſition; il y a donc des progreſſions multiples, ſousmultiples, & numeriques. 6° Les progreſſions qui ont un expoſant moindre que l'unité vont toujours en diminuant, & celles qui ont l'expoſant plus grand que l'unité vont au contraire en augmentant. 7° Si l'on retourne une progreſſion, c'eſt-à-dire ſi l'on change le dernier terme en prémier, & le prémier en dernier, elle deviendra multiple ſi elle étoit ſousmultiple; & reciproquement numerique de moindre inégalité, ſi elle étoit numerique de plus grande inégalité, & enfin elle ira en augmentant ſi elle alloit en diminuant. 8° Le prémier terme d'une progreſſion Géométrique eſt

une

Digitized by Google

une grandeur arbitraire. 9° Le ſecond terme doit être une grandeur de même eſpèce que la prémière, plus grande ou plus petite. 10° Les deux prémiers termes étants donnés, l'expoſant eſt auſſi donné; on voit ſi la progreſſion va en montant ou en deſcendant. Le troiſiéme terme eſt auſſi donné, car le quarré du ſecond diviſé par le prémier c'eſt ſa valeur, il en eſt de même du quatriéme & de tous les autres, de ſorte que la progreſſion eſt déja déterminée quand on a les deux prémiers termes. 11° Si le prémier terme eſt l'unité, les autres contiennent ſucceſſivement toutes les puiſſances du ſecond dans leur ordre naturel: car le troiſiéme terme devant être autant de fois égal au ſecond, que le ſecond l'eſt au prémier, il eſt clair que le ſecond terme étant un nombre, on aura le quarré de ce nombre par la définition même de quarré, & comme l'expoſant eſt au ſecond terme racine quarrée du troiſiéme, le quatriéme ce ſera le troiſiéme multiplié par l'expoſant, c'eſt-à-dire le cube de l'expoſant, la quatriéme puiſſance, la cinquiéme &c. 12° Dans une progreſſion multiple, on a pour terme ſuivant le précédent pris un certain nombre de fois, & celui

celui qui vient après c'eſt un nombre d'unités du prémier terme, pris autant de fois que ce nombre lui-même contient d'unités. Ainſi quand le ſecond terme eſt un grand nombre, & que le prémier eſt petit, l'expoſant étant fort conſidérable fait augmenter la progreſſion d'une maniére inconcevable ; par contre dans les ſousmultiples, la partie aliquote vient toujours plus petite, & ce ſont des ſubdiviſions continuelles.

Enfin dans une numerique, ſuppoſons que l'on ait $\frac{3}{4}$ pour prémier terme, & $\frac{2}{3}$ pour expoſant, le ſecond terme ſera les deux tiers de $\frac{3}{4}$, le troiſiéme ſera les deux tiers des deux tiers de trois quarts, & ainſi de ſuitte. Le prémier terme peut être encore cinq quarts, & l'expoſant auſſi cinq quarts, on aura dans ce cas là $\frac{5}{4}, \frac{25}{14}, \frac{125}{64}$ &c. & ce ſera une ſuite de fractions dont les dénominateurs ſont les puiſſances de 4, & les numerateurs les puiſſances de 5.

*Dans chaque progreſſion, tout terme à la reſerve du prémier, c'eſt le prémier multiplié par l'expoſant élevé à une puiſſance dont le nombre qui en marque le degré eſt égal à celui du nombre des termes moins l'unité.* 1° Dans les progreſſions

sions multiples, le prémier terme étant l'unité, les trois autres marquent successivement les diverses puissances du second terme, ensorte que le second terme sera la prémière puissance, le troisiéme sera le quarré &c. & l'on aura comme on le disoit le prémier terme, savoir 1 multiplié par le dégré de l'exposant élevé à une puissance d'autant de dimensions moins une qu'il y a de termes dans la progression en prenant pour le dernier le terme proposé. Si le prémier terme n'est pas l'unité on a dans le second terme le prémier multiplié par l'exposant ; & le produit multiplié par l'exposant fait le troisiéme terme, de sorte que chaque terme sera le produit du prémier multiplié par l'exposant élevé à une puissance &c. comme il est évident. 2° Dans les raisons sous-multiples on a le second terme qui vaut le prémier multiplié par l'exposant, moindre que l'unité, le troisiéme est le prémier multiplié par le quarré de l'exposant & ainsi de suitte; car à mesure que l'exposant se multiplie il devient plus petit, & l'on prend une plus petite partie du prémier terme, mais on ne commence à compter que depuis le second terme la prémière puissance de l'exposant, donc &c. Il en

est

eſt de même pour les progreſſions numeriques, ainſi cette progreſſion ſe trouve univerſellement vraie, & l'on peut en tirer le corrolaire ſuivant.

Le dernier terme d'une progreſſion eſt égal au produit du prémier par l'expoſant élevé à une puiſſance d'autant de dimenſions moins une qu'il y d'unités dans le nombre des termes de la progreſſion. Ainſi la faiſant de 100 termes, le dernier ſera le prémier terme multiplié par la 99$^{e}$ puiſſance de l'expoſant, c'eſt-à-dire par l'expoſant multiplié 98 fois par lui-même. Connoiſſant le prémier terme, l'expoſant & le nombre des termes, on trouvera la valeur de chaque terme en particulier, c'eſt-à dire déterminer toute la progreſſion; car comme on l'a vû auparavant, ſi je multiplie l'antécedent par l'expoſant j'ai le conſéquent, ainſi on a le ſecond terme & ces deux en font trois de la proportion continue, on trouvera donc par les règles ci-deſſus indiquées la valeur du quatriéme terme qui eſt le troiſiéme de la progreſſion, & avec lui tous les autres termes. Le prémier terme & le nombre des termes étant donné, l'expoſant eſt arbitraire, & la progreſſion par conſéquent indéterminée. Si les deux prémiers termes

mes & le nombre des termes étant donné, on veut chercher le dernier terme, il faut diviſer le ſecond terme par le prémier pour avoir l'expoſant, élever cet expoſant à une puiſſance d'autant de dimenſions égales, qu'il y a d'unités dans le nombre des termes moins un, & multiplier cette puiſſance par le prémier, le produit ſera le nombre propoſé. *Dans toute progreſſion Géométrique, le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, eſt égal au produit des extrêmes.* Le prémier des moyens, c'eſt le prémier terme multiplié par une certaine puiſſance de l'expoſant; le ſecond des moyens pourra être enviſagé comme une grandeur ſimple, & le dernier des extrêmes, c'eſt le ſecond des moyens multiplié par la même puiſſance de l'expoſant, à cauſe que les deux moyens ſont également éloignés des extrêmes, on aura donc le prémier des extrêmes eſt au prémier des moyens, comme le ſecond moyen eſt au dernier des extrêmes, puiſque ce ſont deux raiſons ſousmultiples & égales, donc le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens; ce qu'il falloit démontrer. Quand le nombre des termes de la progreſſion eſt

impair, le quarré du terme moyen, c'eſt-à-dire du milieu, eſt égal au produit des extrêmes. De plus le produit ou plan fait des deux termes d'une progreſſion eſt égal au quarré d'un troiſiéme moyen entre ces deux termes; car la progreſſion eſt uniforme par tout.

Je vais expliquer algébriquement les deux propoſitions ſuivantes.

## LEMME.

*Dans toute progreſſion Géométrique, le ſecond terme moins le prémier eſt au prémier, comme le dernier moins le prémier à la ſomme de tous ceux qui le précédent.* Soit une progreſſion comme $\dot{\dot{-}}\, a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5 \ldots\ldots$, je dis que l'on aura cette proportion $aq - a : a = aq^5 - a : a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4$, ſomme des termes qui précédent le dernier. Pour faciliter le calcul, je reduis d'abord $aq - a : a$ à ſes plus petits termes ſavoir $q - 1 : 1$; j'ai donc, $q - 1 : 1 = aq^5 - a : a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4$, je multiplie les extrêmes, ſuivant les règles on a $aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 - a - aq^2 - aq^3 - aq^4$, & la reduction étant faite,

faite, cela se reduit à $aq^5 - a$ égal, comme on le voit, au produit des moyens; donc ces quatre grandeurs sont proportionnelles, de la maniére qu'on l'avoit d'abord supposé par une proposition que nous avons déja démontrée.

Si l'on veut se servir d'une expression plus abrégée, j'appelle $s$ la somme de la progression, $n$ le nombre des termes, après quoi je change ainsi ma formule précedente en celle-ci. $aq^{n-1} - a : s - aq^{n-1} = aq - a : a = q - 1 : 1$. C'est-à dire, le dernier terme moins le prémier est à la somme de tous ceux qui le précedent, comme le second moins le prémier est au prémier. Ce qu'il falloit démontrer.

## THEOREME.

*Dans une progression Géométrique, la somme est égale au terme qui suivroit le dernier moins le prémier, divisé par l'exposant moins l'unité.* Par le Lemme précédent on a $aq - a : a = aq^{n-1} : s - aq^{n-1}$, ou, ce qui revient au même,

même, $q - 1 : 1 = aq^{n-1} - a : s - aq^{n-1}$. Le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, donc $qs - s - aq^n + aq^{n-1} = aq^{n-1} - a$ (1) $qs - s - aq^n = -a$ (2) $qs - s - aq^n + a = 0$ (3) $qs + a - s + aq^n$ (4) $qs - s + a = aq^n$ (5) $qs - s = aq^n - a$ (6) $\frac{qs-s}{q-1} = \frac{aq^n-a}{q-1} = s$. C'eſt-à-dire le terme qui ſuivroit le dernier (dont la valeur eſt $aq^n$ puiſque le dernier eſt $aq^{n-1}$) moins le prémier, diviſé par l'expoſant moins l'unité eſt égal à la ſomme de la progreſſion. Cette démonſtration eſt tout-à-fait générale, comme il eſt aiſé de s'en appercevoir par la nature de la démonſtration que je viens d'en donner.

## COROLLAIRES.

1°. Connoiſſant le prémier terme, l'expoſant & le nombre des termes, on trouvera la ſomme de la progreſſion: car on cher-

cherchera d'abord le dernier, comme il a déja été enſeigné ci-devant, & le multipliant par l'expoſant, on aura celui qui ſuivroit le dernier, après quoi, ſi l'on en retranche le prémier, il n'y a plus qu'à le diviſer par l'expoſant moins l'unité. 2° Dans une progreſſion dont l'expoſant eſt 2, il eſt évident que le terme qui ſuivroit le dernier moins le prémier eſt égal à la ſomme de la progreſſion : ſi l'expoſant eſt 3, $aq^n - a$ eſt double ; ſi c'eſt 4, il eſt triple ; ſi 5, quatruple ; ſi 6, cinq fois égal à la progreſſion entiére.

NEANDER. Cette démonſtration eſt fort curieuſe, mais ne pourriés-vous point en donner une plus analytique, & ſans vous ſervir de caractères algébriques ?

MATHESIUS. Je vais tâcher de vous ſatisfaire, mais je n'oſerois vous le promettre, car je n'ai pas encore bien réfléchi ſur ce ſujet, m'étant toujours contenté pour un pareil cas de la démonſtration que je viens de vous faire: je crois que pour y réuſſir d'autant mieux, il eſt à propos d'entrer dans quelque détail, n'étant guéres poſſible de tout em-

braſſer d'une ſeule vûe. Je commence donc par les progreſſions où la raiſon double règne, dont le prémier terme ſoit une grandeur quelconque, de même que le nombre des termes, mais que je détermine de cette façon pour plus grande facilité $a = 1$, $m = 2$, $n = 5$, je dis que le ſixiéme terme vaudra autant que les cinq autres. En effet, le ſixiéme terme eſt le double du cinquiéme; je mets à part l'un des deux, & l'autre, je vois qu'il contient deux fois le quatriéme, j'en laiſſe encore un pour le joindre au cinquiéme terme, & l'autre qui reſte valant encore deux fois le troiſiéme, je puis ajoûter comme il eſt évident, le troiſiéme aux deux ſuivants, le troiſiéme reſtant donnera le double du ſecond; & le ſecond reſtant, le double du prémier: quand on aura donc retranché le prémier terme du ſixiéme, on aura la ſomme de tous ceux qui le précédent, c'eſt-à-dire la ſomme de la progreſſion.

Toutes les fois donc que l'expoſant eſt un nombre, la même choſe doit avoir lieu: ſuppoſons $\frac{3}{4}$ le prémier terme d'une progreſſion, 6 pour l'expoſant, & 4 pour le nombre des termes: le cinquiéme terme moins le prémier ſera quintu-

ple

ple de la progreſſion. $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{3}{4}.\ \frac{18}{4}.\ \frac{108}{4}.\ \frac{648}{4}$ je dis que $\frac{3888}{4} - \frac{3}{4}$ c'eſt-à-dire $\frac{3885}{4}$ c'eſt cinq fois la ſomme entiére de la progreſſion, & effectivement $3 + 18 + 108 + 648 = 777 = 3885 : 5$. Car il eſt bien évident que chaque terme à la reſerve du prémier valant ſix fois le terme qui le précéde, on aura dans le terme qui ſuivroit le dernier cinq fois la valeur du dernier, & qu'il en reſtera un pour donner cinq fois la valeur du troiſiéme &c. en ſorte que ſi on ôte le prémier terme de celui qui ſuivroit le dernier, on aura cinq fois la valeur de chacun des termes, c'eſt-à-dire la ſomme totale le même nombre de fois. Voilà pour les progreſſions multiples de quelque nature qu'elle puiſſent être. Quand aux ſousmultiples, il n'eſt beſoin que de les retrouver en les faiſant multiples, ou bien à employer des ſignes négatifs comme dans cet exemple $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 32. 16. 8. 4. 2. 1. le terme qui ſuivroit le dernier moins le prémier c'eſt $1 - 32 = -31$, l'expoſant $\frac{1}{2} - \frac{1}{1}$ vaut $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{-1}{2}$, de ſorte que $-31 : -\frac{1}{2} = 62$ eſt la ſomme

de progreſſion. C'eſt ce qu'il s'agit de faire voir par raiſonnement, & que je vais prouver de cette maniére. Le prémier terme 32 eſt le ſecond plus la moitié du prémier, le ſecond c'eſt le troiſiéme & la moitié du ſecond, le troiſiéme c'eſt le quatriéme & la moitié du troiſiéme, le dernier enfin, c'eſt celui qui le ſuivroit & la moitié du dernier : donc le prémier terme vaut la moitié de la progreſſion & le terme qui ſuivroit le dernier ; c'eſt pourquoi ôtant le prémier terme de celui qui ſuivroit le dernier, il s'en manque la moitié de la ſomme de la progreſſion que l'on n'ait un zero ; le terme qui ſuivroit le dernier, moins le prémier eſt donc la moitié de la progreſſion, & ſi la ſomme négative diviſée par deux eſt diviſée par la moitié de l'unité, c'eſt un nombre d'unités dans le quotient auſſi grand qu'il y en auroit eû dans le produit de la moitié de la ſomme par le nombre 2, comme il eſt évident ; donc en ſuivant cette méthode on trouvera que les progreſſions ſousmultiples doivent avoir la même propriété que celle que nous venons de remarquer ſur les progreſſions multiples. Voyons maintenant ce qu'il y aura encore à dire ſur les progreſſions nu-

numeriques, & prenons pour exemple celle-ci $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{3}{4} : \frac{6}{20}\ \frac{12}{100}\ \frac{24}{500}\ \frac{48}{2500}$ dont l'expoſant eſt $\frac{2}{5}$ : le prémier terme contient le ſecond & trois cinquiémes du prémier, le ſecond contient le troiſiéme avec les trois cinquiémes du ſecond, & ainſi de ſuite juſques au dernier qui contient trois cinquiémes de ſa valeur & celui qui le ſuivroit ; le prémier terme contient par là-même les trois cinquiémes de la ſomme, & le terme qui ſuivroit le dernier, lequel étant ôté, il ſe trouve que le terme qui ſuivroit le dernier moins le prémier vaut les trois cinquiémes de la ſomme ; l'expoſant moins l'unité, fait une différence de trois cinquiémes, or les trois cinquiémes de la ſomme diviſées par trois cinquiémes d'unités fait juſtement la ſomme de la progreſſion ; la raiſon en eſt que la ſomme & l'unité ont été multipliées l'une & l'autre par la fraction $\frac{3}{5}$ c'eſt pourquoi ces deux grandeurs demeurent en même raiſon qu'auparavant ; mais la ſomme de la progreſſion & l'unité ont pour expoſant cette ſomme elle-même, donc les trois cinquiémes de la ſomme diviſées par les trois cinquiémes de l'unité valent la ſomme totale ; ce qu'il falloit démontrer.



Digitized by Google

Ce que j'ai dit jusques-ici sur cette proposition est déja plus que suffisant pour faire comprendre qu'avec un peu d'application on pourra aisément en établir la vérité d'une maniére aussi générale que par le calcul litteral, au moins il me le paroit, & je ne vois rien qui pût en empêcher. Je ne m'y arrêterai donc pas davantage, parce que je vous ai déja mis comme sur les voyes pour faire les recherches que vous jugerés à propos d'entreprendre sur ce sujet.

Une progression peut être continuée à l'infini soit en montant soit en descendant, c'est-à-dire que l'on ne sauroit trouver, & qu'il implique, même: contradiction que l'on trouve un dernier terme au delà duquel on ne puisse plus aller, & c'est ce qui ne sera pas difficile à prouver: car 1° il est certain que l'on peut toujours ajoûter un nombre à un autre nombre, & qu'on peut par conséquent en prendre un multiple quelconque; 2° pour les progressions qui vont en diminuant, on pourra toujours les continuer, sans avoir même besoin de grandeurs négatives; parce que l'unité est une grandeur indéterminée dans laquelle on peut concevoir une infinité de parties, tout

comme

comme l'on peut prendre auſſi un nombre infini d'unités ; ayant donc une fraction, ſi je veux la rendre plus petite, il n'eſt beſoin que d'augmenter le dénominateur qui pouvant l'être continuellement, la fraction diminuera toujours dans la même raiſon.

La ſomme d'une progreſſion peut toujours s'exprimer par une raiſon Géométrique. Quand elles vont en augmentant, rien n'eſt plus clair que cette propoſition, car le terme qui ſuivroit le dernier moins le prémier étant diviſé par l'expoſant moins l'unité eſt égal à la ſomme de la progreſſion, & comme quand on retranche ou que l'on multiplie pluſieurs raiſons Géométriques les unes par les autres, les reſtes ou les produits ſont encore en raiſon Géométrique ; cette propriété a néceſſairement lieu dans toutes ſortes de progreſſions. Suivant cela, dans la progreſſion ſousmultiple qui a la fraction $\frac{1}{2}$ pour expoſant avec l'unité pour prémier terme (le nombre des termes étant indéfini, c'eſt-à-dire auſſi grand que l'on voudra) ſi l'on veut ſavoir combien valent cette unité, cette moitié, ce quart, cette huitiéme &c. pris conjointement, je n'ai qu'à ſuppoſer un terme

qui ſuivît le dernier, ce que l'on trouvera toujours en multipliant le dernier par l'expoſant quelque grand que puiſſe être le nombre des termes; je retranche enſuite de ce terme la valeur du prémier, & le reſte je le diviſe par l'expoſant moins l'unité: mais ſi l'on ne fait pas attention à la valeur du dernier terme à cauſe de ſon extrême petiteſſe en comparaiſon de l'unité, on négligera de même la valeur du terme qui ſuivroit le dernier, & par conſéquent ſi j'ôte l'unité de o cette unité devient négative, & l'expoſant dont on ôte 1, c'eſt la moitié de l'unité négative, on a donc $-1 : -\frac{1}{2} = 2$; la ſomme de la progreſſion c'eſt donc deux unités; & puis que le prémier terme *a* étoit égal à *un*, les moitié, quart, huitiéme, ſeiziéme &c. valent enſemble l'unité, ſi l'on regarde comme zero la valeur du dernier terme.

Je vais tâcher de rendre ceci encore plus ſenſible. Soit la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{64}$. Déja on ne peut ſoutenir que la moitié d'une grandeur ſoit zero, car $o + o = o$; de plus il n'eſt pas moins certain qu'il s'en manque toujours la valeur du terme que l'on regarde comme

me le dernier dans cette progreſſion, que la ſomme ne ſoit l'unité entiére; en effet ſi à cette fraction $\frac{1}{4}$ j'ajoûtois encore un quart, cela ſeroit, joint au prémier terme $\frac{2}{2}$, c'eſt-à-dire l'unité, mais il s'en manque la valeur de ce ſecond terme, j'en prens la moitié pour faire le troiſiéme, il s'en manque encore la valeur de cette autre moitié que je n'aye l'unité, c'eſt ce qui ſe voit auſſi évidemment dans tous les autres termes; parce que la progreſſion eſt par tout uniforme & ſe fait toujours de la même maniére; de là vient que ſi le dernier terme qui, au fond, eſt une grandeur auſſi réelle que l'unité, eſt regardé néanmoins comme zero, puis qu'il ne s'en manque que la moitié du dernier terme que l'on n'ait l'unité, on l'aura toute entiére ſuivant cette ſuppoſition. Soit donnée cette autre progreſſion $\frac{2}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$ &c. je dis qu'il s'en manquera toujours le double du dernier terme que l'on n'ait le pénultiéme, & le double du ſecond que l'on n'ait le prémier; de ſorte que dans le ſecond terme, au lieu de prendre le double du prémier pour achever l'unité, je n'en prens que la ſixiéme partie, car $\frac{1}{9}$ c'eſt la ſixiéme par-

tie de $\frac{2}{3}$, il s'en manque donc $\frac{5}{6}$ de celle là que l'on n'ait la valeur de l'entier; & au lieu de prendre ces $\frac{5}{6}$ dans le troiſiéme terme, on ne prend que le tiers d'une $\frac{5}{9}$ c'eſt-à-dire $\frac{1}{27}$, & ainſi de ſuite; on aura toujours plus, mais on ne parviendra jamais à l'unité entiére.

NEANDER. Je repaſſerai tout cela à loiſir, mais je voudrois bien que vous achevaſſiés de m'éclaircir ce qu'il me reſte de difficultés, ſur ces infinis abſolus & relatifs dont vous m'avés déja parlé dans une autre occaſion.

MATHESIUS. Je vais tâcher de vous ſatisfaire du moins en quelque façon. On appelle une progreſſion infinie celle que l'on conçoit être parvenue à un nombre de termes ſi grand, que quelque quantité que l'on puiſſe concevoir, on eſt obligé de le ſuppoſer encore plus grand, c'eſt à-dire comme l'on parle ordinairement *uſque ad numerum quovis dato majorem*; vous devez ſentir qu'il faut bien prendre garde que ceci doit s'entendre dans un ſens relatif & non pas à la lettre, abſolument parlant, puiſque dans le ſens propre il n'y a point de ces infinis de divers genres, à cauſe que ce que l'un appelle infini

du

du prémier ordre, je puis le nommer, ſi je veux, infini du centiéme, du milliéme &c. Il n'y a certainement pas un nombre déterminé de diviſions par le moyen deſquelles une grandeur ceſſe d'être finie pour devenir infiniment petite: & en vérité je ne puis qu'être extrêmement ſurpris, comment il eſt poſſible que tant d'habiles gens ſe ſoient donnés la peine de faire ces calculs d'infinis & autres minuties ſemblables, car ce n'eſt autre choſe que des imaginations & de pures réveries des Mathématiciens; ils feroient beaucoup mieux ſans doute de laiſſer à part ce ſujet là, plûtôt que de débiter des choſes qui n'ont ni fondement ni réalité.

En effet, quand on dit que le dernier terme d'une progreſſion eſt infiniment petit, & qu'on prétend le traiter de zero en cette qualité, ce terme pourtant conſideré en lui-même, n'eſt pas plus zero dans ce cas là que la ſphère du monde entier, à cauſe qu'étant une grandeur déterminée on en peut trouver un qui ſoit en comparaiſon de lui auſſi petit qu'il l'eſt lui-même en comparaiſon du terme prémièrement pris. De plus, ce monde, c'eſt-à-dire l'étendue qu'il occupe, peut être regardé comme un infiniment pe-

tit, ou comme un infiniment grand suivant les objets avec lesquels on trouvera à propos de le comparer. Je ne voudrois donc pas établir, comme on le fait, plusieurs classes d'infinis, distinctions qui dans un sens sont contradictoires, & qui prises dans celui qu'elles peuvent avoir ne sont d'aucun usage réel & solide. Tout le droit que je me reserve sur les infinis, c'est de pouvoir regarder comme zero quelque grandeur qu'il me plaira de traiter de la sorte, avec la liberté de leur redonner celle qu'elles doivent avoir, ou de leur en assigner une suivant l'usage que j'en voudrai faire. Si vous voulés savoir ce que je pense de l'infini absolu, voici mon sentiment à ce sujet.

L'espace infini n'est pas divisible, à proprement parler, en parties aliquotes, ou seulement en parties susceptibles de séparation & d'éloignement; mais je puis distinguer un nombre fini de parties dans l'immensité de l'espace, & reduire à ce nombre fini l'idée que j'en ai en faisant abstraction du reste, & en les regardant comme toutes égales. L'infini n'est pas borné, mais c'est nous qui le bornons par la foiblesse de nos idées

&

& de notre imagination : ces parties aliquotes que vous conceviés être celles de l'eſpace ſont encore diviſibles en d'autres plus petites, & il n'y a aucune particule d'eſpace où cette diviſibilité n'aille juſques à l'infini. Quand on parle d'un être infini, on éloigne l'idée de quantité, on ne peut rien en ôter ni y ajoûter quoique ce ſoit, c'eſt là ſa nature & ſon eſſence. Que ſi vous avés égard à une grandeur indéterminée, elle pourra bien être augmentée & diminuée à l'infini; mais dans les autres ſujets il faut s'en tenir à l'idée vague & ne point en faire la repréſentation d'un objet fini & déterminé, ſans quoi c'eſt trop ſe hazarder que de dire d'une grandeur en particulier qu'elle eſt infiniment diviſible.

Les idées de l'infini abſorbent pour ainſi dire toute la capacité de notre eſprit, elles étonnent notre foible raiſon, c'eſt un abime qui a des charmes pour lui; & ſans contradiction, c'eſt en même tems un ſublime à laquelle il ne ſauroit atteindre, mais c'eſt une élévation qui lui plait, qui le ravit & qui lui ſemble ſeule capable de contenter ſes déſirs & de les ſatisfaire; c'eſt une immenſité où il ſe perd, & qui ſur-

Digitized by Google

ſurpaſſe de beaucoup toute ſa capacité & ſon intelligence, quoique pourtant il ſoit obligé de le reconnoitre: après cela aura-t-on de la peine à comprendre qu'il puiſſe y avoir une ſubſtance qui eſt l'infini abſolu, l'Etre ſans bornes, la réalité parfaite: nous voyons en même tems dans le vaſte receptacle de toutes choſes, nôtre petiteſſe & notre grandeur, le néant dont nous ſommes ſortis, & tout le prix de ce que nous pouvons être. L'ame eſt donc une ſubſtance bien excellente, elle renferme bien du grand & du ſolide de pouvoir ainſi s'élever à ce qu'il y a de plus beau & de plus incompréhenſible dans la nature des choſes; mais ce n'eſt pas ici le lieu de ſe livrer à de telles idées, ce ſeroit trop s'écarter de ſon ſujet, il faut y revenir.

Pour être en état de connoitre ſi l'idée de diviſibilité, & celle de grandeur ſont entiérement ſynonimes, il eſt important de ſe bien convaincre prémièrement ſi l'on peut admettre ſans contradiction une infinité de parties dans un tout fini, or il me paroit que c'eſt une choſe impoſſible; car tout ce que la Créature a reçu de ſon Créateur eſt fini, eſſence, proprietés, attributs, en un mot tout ce qu'il y a de

réel

réel en lui, tout a des bornes, tout eſt déterminé; l'infini abſolu comprend lui ſeul tout l'infini; & par quelle raiſon les êtres créés en poſſéderoient-ils une partie? ce ſeroit à mon avis faire tort à l'Etre ſuprême, & rendre pour ainſi dire, ſa gloire & ſon eſſence diviſibles & communicables à de ſimples créatures. Suivant ce principe, la matière ne ſera pas diviſible à l'infini, parce qu'il implique contradiction qu'il y ait une infinité de ſubſtances dont il puiſſe reſulter un tout contingent & par là-même, une quantité. Si l'on répond que les ſubſtances dont le nombre eſt infini ſont extrêmement petites, & qu'à cauſe de cela elles compoſent un tout fini, je remarquerai à cette occaſion, 1° qu'un nombre infini eſt quelque choſe de contradictoire, comme je l'ai déja obſervé dans un autre endroit, & 2° comme les termes de petit & de grand ſont des ſignifications purement rélatives, il ne s'enſuivroit pas moins que leur compoſé ſeroit infini, contre la ſuppoſition. Une infinité de réalités fait une réalité infinie, or toute réalité infinie appartient à l'Etre abſolument infini, donc il eſt évident que cette proprieté

ne

ne peut convenir à la matière ni à aucun autre objet fini.

Nous pouvons encore faire réflexion que la matière étant un assemblage de substances, cet assemblage ne doit subsister qu'en vertu des choses assemblées ; mais dans la matière on ne trouvera jamais des choses assemblées qui ne soient elles-mêmes d'autres assemblages, dès qu'on la supposera divisible à l'infini, donc la raison suffisante de l'existence des corps ne peut avoir lieu avec leur prétendue divisibilité à l'infini ; au lieu que dans l'espace absolu, comme les parties dont il est composé ne sont pas des substances, & que de plus, la raison de leur existence se trouve dans la nature même de chaque assemblage, il est clair que l'on ne sauroit faire ici la même difficulté.

Je sais bien que l'on a de coûtume de nous inonder à ce sujet d'un torrent de démonstrations Géométriques pour prouver que la matière est divisible à l'infini, mais cela ne fait rien pour l'étendue corporelle, comme il seroit aisé de le faire voir, si c'étoit ici le lieu de traiter ce sujet plus au long, & d'entrer dans quelque détail sur cet article.

On se sert encore d'un argument très spé-

ſpécieux pour établir l'infinie diviſibilité de tous les êtres étendus & finis ; on dit que deux parties non étendues ou deux ſubſtances dont chacune n'eſt pas une quantité ne peut faire une quantité. J'avoue que c'eſt une véritable démonſtration, par rapport à ceux qui croient que les prémiers élémens de la matière ſont des ſubſtances, au lieu que ce ſont des êtres non étendus, qui par leur nombre & leur intenſité reciproque produiſent l'étendue corporelle, ſans être néanmoins ſubſtances, mais plûtôt des modifications qui influent les unes ſur les autres: dans ce cas il eſt viſible que l'argument que je viens de rapporter ne ſauroit combattre cette explication. Je vous expoſerai un jour à fond quel eſt mon ſentiment ſur ce ſujet, mais en attendant il vous ſufit de ſavoir que l'eſprit ne peut trouver aucunes bornes dans la diviſibilité de ce qu'on appelle grandeur ou quantité finie. Néanmoins ceci ne porte aucune atteinte à la certitude des Mathématiques, qui, comme je l'ai d'abord dit, ne ſuppoſent point l'exiſtence des objets extérieurs, mais l'évidence dans les idées ſeulement ; je ne me répens pas néanmoins

moins d'avoir fait cette petite digreſſion qui pourra vous être dans la ſuite de quelque utilité.

---

## *ENTRETIEN XVIII.*

### MATHESIUS.

DAns une progreſſion Géométrique, il y a comme dans les progreſſions Arithmétiques 5 choſes principales à conſiderer. 1° le prémier terme 2° l'expoſant 3° le dernier terme, 4° le nombre des termes, & enfin 5° la ſomme de la progreſſion. Juſques-ici nous avons établi & démontré les propoſitions ſur leſquelles ſont fondés les Problêmes que nous nous propoſons d'examiner.

### PROBLEME I.

Les deux extrêmes d'une progreſſion & ſon expoſant étants donnés, trouver la ſomme de la progreſſion 501. Il faut multiplier le dernier terme par l'expoſant, & on a le terme qui ſuivroit le dernier, après cela il n'y a qu'à en retrancher le prémier qui eſt l'un des extrêmes donnés, &

Digitized by Google

& diviſer le reſte par l'expoſant moins l'unité, le quotient donnera la ſomme de la progreſſion, qui eſt ce que l'on cherchoit.

## PROBLEME II.

Le prémier terme, l'expoſant & le nombre des termes étants donnés, trouver la ſomme de la progreſſion 501. Il faut 1° élever l'expoſant à une puiſſance d'autant de dimenſions moins une qu'il y a d'unités dans le nombre des termes: 2° multiplier cette puiſſance par le prémier terme ce qui donne le dernier, & enfin 3° par le Problême précédent on trouvera la ſomme que l'on cherche.

## PROBLEME III.

Trouver l'expoſant d'une progreſſion par le moyen du prémier, du dernier, & du nombre des termes 501. Je diviſe le dernier terme par le prémier, le quotient me donne une puiſſance de l'expoſant d'autant de degrés qu'il y a d'unités dans le nombre des termes moins un; c'eſt pourquoi prenant la racine de cette puiſſance on aura l'expoſant: mais comme

Digitized by Google

me nous n'avons pas encores enſeigné la maniére d'extraire les racines des grandeurs, il faudra faire divers eſſais & ſuppoſer différentes valeurs à l'expoſant pour voir quelle eſt la véritable; on y ſera encore aidé par cette propoſition que nous avons déja vûe en parlant des nombres pairs & impairs; c'eſt que ſi la puiſſance de cet expoſant eſt un nombre pair, il ſera auſſi pair, & reciproquement ſi la puiſſance eſt impaire la racine le ſera de même; car ſoient les dimenſions égales de l'expoſant $x, x, x, x, x$, puiſque le produit de deux impairs eſt néceſſairement un nombre impair, $xx$ ſera impair, de même que $xx \times x$, & $x^3 \times x$ &c.

Vous me dirés peut-être que cette opération n'eſt pas fondée ſur un principe Mathématique. Cela eſt vrai, mais comme il ne s'agit ici que d'une ſimple maniére d'opérer, & que pour réſoudre ce Problême, on peut employer avec autant & même plus de facilité la méthode que j'indique ici, on peut bien s'en ſervir, au moins juſques-à-ce que l'on ſache la véritable maniére d'extraire les racines, dont nous parlerons dans la ſuite.

PRO-

## PROBLEME IV.

Le prémier, le dernier terme, & l'exposant étant donnés, on trouve le nombre des termes en divisant le dernier par le prémier, & puisque le quotient contient autant de dimensions de l'exposant qu'il y a d'unités dans le nombre des termes moins un, il faut élever l'exposant de puissance en puissance jusques-à-ce que l'on ait un produit égal à ce quotient, après quoi si l'on compte les dimensions de l'exposant, ce sera le nombre des termes moins un; par conséquent pour avoir ce que l'on demandoit, il n'y a qu'à ajoûter l'unité à ce nombre là, comme il est évident.

## PROBLEME V.

L'exposant, le nombre des termes & le dernier étants connus trouver le prémier terme 501. Il faut élever l'exposant à la puissance requise & diviser le dernier terme par cette puissance, le quotient sera le prémier terme.

PRO-

Digitized by Google

## PROBLEME VI.

L'exposant, le nombre des termes, & la somme de la progression étants donnés, trouver chacun des termes. Ceci peut s'exécuter par le moyen d'une règle de fausse position touchant laquelle nous avons dit qu'un multinome étant donné avec le nombre de ses termes, & la raison qu'ils doivent avoir entr'eux, on peut connoitre chacun des termes: il n'y aura donc ici qu'à prendre une progression qui ait autant de termes que la proposée & dont l'exposant soit aussi le même; on prendra ensuite la somme de tous ces termes; & comme l'exposant est toujours celui de la raison qui se trouve entre deux termes consécutifs pris de la même manière, on a la raison des termes de la progression dont on cherche la somme, & je dis que par conséquent la progression supposée est à la progression donnée comme le prémier terme de l'une est au prémier terme de l'autre; c'est ce qui paroit d'abord évident, mais que je ne laisserai pourtant pas de démontrer de toutes les progressions quelconques.

Les deux derniers termes des progressions

ſions que nous avons ici, c'eſt le prémier terme multiplié par une puiſſance de l'expoſant d'autant de dimenſions qu'il y a d'unités dans le nombre des termes moins un ; or l'expoſant eſt le même dans l'autre, & le nombre des termes eſt auſſi le même ($a = a, b = b, a^n = a^n$) les prémiers termes étants multipliés chacun par une même grandeur ſont entr'eux en même raiſon qu'ils avoient avant que d'être multipliés, c'eſt-à-dire que les derniers termes ſont en même raiſon que les prémiers dans toutes ſortes de progreſſion : je les multiplie l'un & l'autre par l'expoſant commun, les termes qui ſuivroient le dernier ſont donc en même raiſon que les derniers ; je retranche des termes qui ſuivroient le dernier le prémier terme de part & d'autre, la raiſon ne changera point (ſuivant cette propoſition qui dit que deux grandeurs demeureront en même raiſon quoique l'on y ajoûte ou que l'on en retranche ; pourvû que ce que l'on ajoûte ou que l'on retranche à la prémière, ſoit à ce que l'on ajoûte ou que l'on retranche de la ſeconde, comme la prémière eſt à la ſeconde). Je diviſe enfin par l'expoſant moins l'unité

ces

ces deux termes qui ſuivroient le dernier moins les prémiers, c'eſt-à-dire encore par la même grandeur, ainſi les quotients, ſommes des deux progreſſions, ſont entr'elles comme les prémiers termes quand l'expoſant & le nombre des termes ſont des grandeurs communes à l'une & à l'autre. On fera voir auſſi ſuivant ce principe que deux mêmes termes dans les progreſſions ſemblables ſont en proportion avec les ſommes totales, de ſorte que par pluſieurs règles de trois conſécutives on pourra découvrir tous les termes de la progreſſion donnée; mais il eſt bien clair que l'on n'aura beſoin que du prémier terme, après quoi tout doit être connu par un des Problèmes précedents.

## PROBLEME VII.

Le prémier terme d'une progreſſion, l'expoſant de la raiſon qui y règne, & la ſomme de cette progreſſion étants donnés, trouver le nombre des termes & la valeur du dernier. Pour le connoitre je dis; la ſomme de la progreſſion, c'eſt le terme qui ſuivroit le dernier moins le prémier, diviſé par l'expoſant moins l'unité, il

Digitized by Google

il ſera donc aiſé de trouver la valeur du dernier terme; je diviſe enſuite cette quantité par le prémier terme, & j'éleve l'expoſant de puiſſance en puiſſance juſques-à-ce que j'aie le dernier quotient, je vois combien il y a de puiſſances dans l'expoſant, & j'ajoûte l'unité, ce qui me donne la valeur du nombre des termes. On a donc trouvé ce que l'on cherchoit, ſavoir le nombre des termes & la valeur du dernier.

Je vais à préſent, par curioſité plûtôt que pour vous faciliter l'intelligence de cette méthode, vous la propoſer en termes algébriques. Soit $a$ le prémier terme, $q$ l'expoſant de la progreſſion $s$ la ſomme de tous les termes. On cherche $n$ le nombre des termes & la valeur du dernier.

Maintenant $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, $qs - s = aq^n - a$, $qs - s + a = aq^n$ $\frac{qs - s + a}{a} = q^n$. or $\frac{qs - s + a}{a}$ eſt connu: de ſorte que faiſant $q.\ q^2\ q^3\ q^4\ q^5\ q^6$ &c. je vois combien il faut de dimenſions pour faire $q^n = \frac{qs - s + a}{a}$ & ajoûtant l'unité j'ai

$n$ nombre des termes & par conſéquent $aq^n = 1$ le dernier terme. J'en donnerai encore un exemple par chifres. $a = 2$, $q = 3$, $s = 728$. en ſuivant cette formule algébrique j'ai $\frac{qs = s + a}{a} = qn$ 729 égal à l'expoſant élevé à autant de dimenſions qu'il y a de termes: c'eſt pourquoi je fais 2. 6. 18. 54. 162. 486 dont la ſomme eſt 728. Je vais parler maintenant de quelques autres propriétés des progreſſions Géométriques; après quoi je finirai cet article.

1° Les progreſſions Géométriques ſont des raiſons compoſées. C'eſt une grandeur qui paſſe par une ſuite continuelle de diviſions & de multiplications, mais toujours de la même maniére, à cauſe de l'égalité des raiſons de deux termes conſécutifs, & pris dans le même ſens. Cette grandeur qui paſſe & repaſſe ainſi ſous diverſes formes, c'eſt le prémier terme qui eſt l'unité quand on le conçoit ſimplement comme grandeur entiére, mais ſans parties, ou c'eſt un nombre, ou c'eſt une fraction, ou c'eſt une raiſon ſousmultiple, ou une raiſon numerique de plus grande inégalité, & alors on peut re-

Digitized by Google

regarder le prémier terme comme unité en ceſſant de faire attention à ſes parties ou à la raiſon qu'il a avec d'autres unités; car ſi l'on a $\frac{3}{4}$ par exemple, pour prémier terme, la grandeur ſeroit l'unité diviſée en quatre parties & priſe trois fois, puis diviſée encore en quatre parties & priſe trois fois dans le ſecond &c. Ainſi la raiſon du prémier terme au dernier doit exprimer le rapport que ce dernier terme, qui n'eſt autre choſe que la grandeur transformée, a avec cette grandeur ſimple, & comme chaque terme pour faire le ſuivant, a été regardé pour lors comme une grandeur abſolue, il eſt certain que ſi l'on exprime par nombres la valeur de chaque terme, & que l'on faſſe attention à la nature des raiſons compoſées, on verra clairement que les progreſſions ſont de véritables raiſons compoſées.

2°. Toutes les puiſſances ou degrés d'une même grandeur ſont en progreſſion. Car ſoit une grandeur quelconque, pourvû qu'on ne prenne pas l'unité, il eſt clair que la ſeconde puiſſance diviſée par la prémière donnant la prémière, c'eſt la valeur de l'expoſant: mais pour avoir une puiſſance du degré ſuivant, on la

multiplie par la racine, valeur de l'exposant; on a donc une suite de grandeurs dont la raison est toujours la même si on les prend de la même maniére, comme $a$. $a^2$. $a^3$. $a^4$. $a^5$. $a^6$ &c.

3°. *Les quarrés, les cubes & les autres puissances d'une progression sont aussi en progression.* Les quarrés sont en raison doublée de leurs racines, les cubes en raison triplée &c. & les raisons composées sont égales entr'elles, quand elles ont des raisons composantes aussi égales; mais la raison de la prémière puissance à la seconde est composée d'un certain nombre de fois la raison de deux prémiers termes de la progression simple, la raison de la seconde puissance à la troisiéme est une raison composée des mêmes, & ainsi de suite, de sorte que les puissances quelconques des termes d'une progression sont en progression.

4°. *En toute progression Géométrique les quarrés de deux termes qui se suivent immédiatement sont entr'eux comme le prémier à celui qui suit le second.*

Deux termes qui se suivent immédiatement sont toujours en même raison que les deux prémiers termes. Leurs quarrés par conséquent sont en raison dou-

Digitized by Google

doublée de la raiſon du prémier terme au ſecond, & la raiſon du prémier au troiſiéme eſt doublée de la raiſon du prémier au ſecond (car $a, b, c, a^2 : b^2 = a : b \times b : c = ab : bc = a^2 : b^2$), donc deux termes qui ſe ſuivent immédiatement ſont entr'eux comme le prémier à celui qui ſuit le ſecond. Ce qu'il falloit démontrer. De même les cubes de deux termes qui ſe ſuivent immédiatement ſont entr'eux comme le prémier terme eſt à celui qui ſuit le troiſiéme; & deux quarrés de quarrés, ſont entr'eux comme le prémier terme eſt à celui qui ſuit le quatriéme.

Cette propoſition ſert de fondement à la ſolution du problème par lequel on cherche un, ou pluſieurs moyens proportionnels entre deux grandeurs données. Et pour commencer par trouver un moyen proportionnel entre deux grandeurs, il faut remarquer que ceci s'exécute par deux voyes diférentes. L'une conſiſte à extraire la racine quarrée de chacune des deux grandeurs & de les multiplier l'une par l'autre, ce qui donne le moyen proportionnel que l'on cherchoit, puiſque les quarrés $a^2$ $b^2$ ont pour racines $a$, $b$, ce qui donne $a^2 : ab = ab : b^2$. L'autre,

c'eſt de multiplier les deux grandeurs données, & d'en extraire la racine quarrée. Pour lors il eſt clair que cette racine quarrée ſera un moyen proportionnel entre les grandeurs données, ſon quarré devant être égal au produit de ces deux grandeurs. Et c'eſt ce que l'on pourra exécuter plus aiſément, quand nous aurons parlé de l'extraction des racines.

Si on veut trouver deux moyens proportionnels entre deux grandeurs, on a une progreſſion Géométrique dont les extrêmes ſont donnés; or par la propoſition précédente, le cube du prémier terme eſt au cube du ſecond, comme le prémier terme eſt à celui qui ſuit le troiſiéme, c'eſt-à-dire les deux grandeurs données ſont entr'elles comme le cube du prémier terme eſt au cube du ſecond, ſavoir le prémier moyen proportionnel que l'on cherche, & comme j'ai ici trois termes connus dans cette proportion, je diviſe le produit des moyens par le prémier des extrêmes, & le quotient me donne le cube du moyen que je cherchois; par conſéquent, ſi j'en extrais la racine, j'aurai la valeur de ce terme moyen. Après avoir ainſi trouvé le prémier, je trouverai le ſecond, comme il a été enſeigné ci-

Digitized by Google

ci-dessus, savoir entre le moyen trouvé & la derniére des grandeurs connues. Ce qui étant fait, la progression est achevée. On peut encore se servir de cette méthode qui est fondée sur ceci. Entre $a^3$ & $b^3$, $a^2 b$ & $ab^2$ sont moyens proportionnels; donc extraisant la racine cubique des deux grandeurs proposées & prenant le produit du quarré de la prémiére par la seconde, on a le prémier moyen, & le produit de la prémiére par le quarré de la seconde donne l'autre moyen : or il est aisé de faire voir que $a^2 b$ & $ab^2$ multipliés l'un par l'autre font le produit des deux cubes $a^3$ $b^3$; car le quarré de $a^2 b$ fait le cube $a^3$ multiplié par la racine de l'autre, ce qui étant encore multiplié par le quarré de cette racine fait justement le produit des deux grandeurs $a^3$ & $b^3$.

*Entre deux grandeurs données, trouver tant de moyens proportionnels que l'on voudra; c'est-à-dire les deux extrêmes d'une progression Géométrique étant donnés avec le nombre des termes, on demande la valeur de tous les termes moyens & de déterminer ainsi toute la progression.* Pour cela il faut prendre une puissance du prémier terme d'autant de dimensions qu'il y a d'unités dans le nombre des termes de la progres-

sion moins un. Il faut supposer aussi que le second terme, prémier des moyens que l'on cherche, est élevé à la même puissance; & ces deux puissances du même degré sont entr'elles comme le prémier terme est au dernier: donc par une opération de la règle de trois, on aura le second terme de la progression élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y en a dans le nombre des termes moins un: extraisant la racine de cette grandeur, on aura le prémier moyen proportionnel, lequel je considére à présent comme le prémier terme, & je l'éléve à une puissance inférieure d'un degré aussi bien que le second moyen inconnu, puis en faisant une seconde opération de la règle de trois, je découvre la puissance de même rang du second moyen, je cherche sa valeur simple que je regarde derechef comme le prémier terme de la progression, continuant ainsi je trouverai tous les termes que je cherchois. Mais il ne sera pas nécessaire de faire toutes ces opérations, la prémière suffit, & connoissant le second terme d'une progression dont j'ai les deux extrêmes & le nombre des termes, je peux la continuer aisément & achever de la déterminer.

Quand

Quand on a fait des incommenſurables & de l'extraction des racines, on peut démontrer aiſément qu'entre deux grandeurs données, il eſt ſouvent impoſſible d'exprimer la valeur des moyens proportionnels que l'on cherche par des nombres, fractions ou raiſons quelconques. Or maintenant pour s'aſſurer que la progreſſion eſt donnée quand les deux extrêmes & le nombre des termes ſont déterminés, il faut remarquer que s'il étoit poſſible d'en trouver d'autres que ceux-là, la progreſſion auroit un autre expoſant plus grand ou plus petit qui ne conduiroit plus par là même à la derniére grandeur donnnée avec le même nombre de termes, comme il eſt évident. Toutes les fois donc qu'une progreſſion peut s'exprimer par nombres, ſi l'on donne les deux extrêmes & le nombre des termes on trouvera la ſomme de la progreſſion par la méthode que nous venons d'indiquer.

Il eſt vrai que l'on a une méthode plus abrégée, c'eſt de diviſer le dernier terme par le prémier, le quotient ſera l'expoſant élevé à une puiſſance d'autant de dimenſions qu'il y a d'unités dans le nombre des termes moins un. De ſorte

que par une extraction de racines on pourra connoitre l'exposant avec lequel tous les termes de la progression peuvent être aisément déterminés. Cette opération est plus simple, comme vous voyés, mais la prémière se présente plus naturellement à l'esprit, quand on ne fait pas attention à l'exposant & que l'on regarde uniquement les termes inconnus comme des moyens proportionnels.

NEANDER. J'ai quelques affaires qui m'appellent présentement dehors, & qu'il m'est impossible de renvoyer davantage. Ainsi je vous prie de vouloir bien continuer seulement la semaine prochaine.

MATHESIUS. Vous êtes parfaitement libre sur cet article, nous reservons donc pour la prémière entrevûe la progression Géométrique & Arithmétique de la numeration ; car je n'avois envisagé jusques-ici les nombres que d'une maniére tout à fait abstraite.

ENTRE-

## *ENTRETIEN XIX.*

### MATHESIUS.

IL n'y a perſonne qui n'ait l'idée de l'unité, de deux & de trois, & qui ne conçoive ces deux prémiers nombres avec une entiére évidence, une parfaite diſtinction & une extrême facilité. C'eſt l'entendement comme l'imagination qui nous les fournit en même tems. Mais il n'en eſt pas de même des autres nombres; celui de *quatre*, par exemple, quoi qu'il ſoit le plus ſimple après celui de trois, ne ſe conçoit pas ſi bien & ſi nettement que trois. Il ſemble qu'il faille faire néceſſairement une repriſe avant que de l'appercevoir tout entier; $4 = 3 + 1$ ou $4 = 2 + 2$. A plus forte raiſon on ne pourra pas embraſſer d'une ſeule vûe toutes les unités qui compoſent un nombre médiocrement grand: il faut alors s'en former des idées ſucceſſives & voir peu à peu les parties qui entrent dans leur compoſition. Le nombre 10 eſt fait de 5 parties dont chacune eſt 2, il eſt compoſé de 7 & de 3; & 7 de 4 &

3 ; donc il l'eſt de $3+3+4=6+4=8+2=9+1$. Ces diverſes maniéres de conſiderer un nombre n'ôtent rien à ſa valeur, ce ne ſont que des abſtractions idéales dont les bornes de l'eſprit humain recommandent ſans ceſſe la néceſſité. Il faut donc ſe rendre bien familiéres les notions des prémiers nombres, & ſe ſervir de leur aſſemblage pour parvenir à la connoiſſance des plus compoſés. Déja l'unité n'eſt pas indiviſible, mais je ne fais pas attention à ſes parties afin de trouver un point fixe par où je commence à déterminer la pluralité des parties que je conçois dans une grandeur ; car ſans cela on ſe trouveroit dans une impoſſibilité totale de compter, & il n'y auroit point de numeration. C'eſt ainſi que les centaines les dixaines &c. peuvent paſſer pour des unités ; on dit ſix vingt, trois vingt ; cinq dizaines dix dizaines. Et la fraction $\frac{3}{5}$ peut être quelque nombre que l'on voudra, comme 1 diviſé en cinq parties, dont on en prendra 3, & ainſi des autres.

Chacun ſait que les nombres étants des aſſemblages d'unités, l'addition d'une ſeule fait un nombre plus grand dont cette unité eſt la diférence. De là vient que

que les nombres ſont compoſés d'autres nombres & cela d'autant plus qu'ils s'accroiſſent & s'augmentent. Ce qui fait qu'à meſure qu'ils deviennent grands, on a plus de peine à voir quelle eſt la ſomme de deux ou de pluſieurs nombres ajoûtés enſemble, quelle eſt leur diférence, quel eſt le nombre qui eſt égal à pluſieurs égaux entr'eux & pris enſemble, combien de fois enfin un nombre ſe trouve égal à un autre nombre. Il eſt donc clair que pour éviter la confuſion dans cette multitude d'unités, il faut abſolument établir une gradation fixe à la quelle on rapporte tous les nombres poſſibles, afin qu'en les comparant entr'eux, on puiſſe plus aiſément appercevoir leur diférences. Par exemple je veux connoitre celle de 15 d'avec 32, je n'ai qu'à les comparer avec un troiſiéme nombre quelconque comme 20, & je dis, $15 = 20 - 5$ & $32 = 20 + 12$. Cela étant, pour que 32 faſſe 15 il faut ôter déja tout ce qui le rend plus grand que 20 ſavoir 12 & tout ce qui rend 20 plus grand que 15, qui eſt 5, il faut donc retrancher de 32, pour faire 15, la diférence $12 + 5 = 17$.

Vous ſavés encore que les idées des nom-

nombres ſont toutes intellectuelles, & que l'imagination ne fournit à l'entendement que des ſignes arbitraires pour les déſigner & les mieux reconnoitre. C'eſt ſur le choix de ces ſignes, & ſur la maniére de les combiner que je dois m'arrêter préſentement.

Ce qui a lieu dans l'écriture ordinaire par rapport aux caractères de l'Alphabet & des diverſes langues qu'on met en uſage, a lieu auſſi dans le cas dont nous parlons. Si pour chaque terme il avoit fallu un ſigne vocal tout diférent des autres, une langue demanderoit bien des peines, de la patience & du tems pour s'en procurer la connoiſſance; & il y auroit peu, j'oſe même dire perſonne, qui pût la parler avec facilité & la poſſeder comme il faut: mais on ménage en diverſes façons la capacité de l'eſprit humain; vous ſavés quels moyens la Grammaire met en uſage pour cela; c'eſt ſur tout dans les caractères écrits que je trouve admirable l'ingénieux expédient que l'on a trouvé, & en particulier dans notre langue, qui conſiſte à exprimer une infinité de mots diférents par le moyen de 24 caractères peu diférents entr'eux, mais pourtant ſimples & aiſés à diſtinguer.

guer. On a dans la numeration un ſujet tout ſemblable d'admirer la fécondité de l'eſprit humain, en ce qu'avec dix caractères on peut exprimer par écrit toutes ſortes de nombres propoſés, comme nous l'expliquerons bientôt ; que s'il avoit fallu pour chaque nombre inventer un nouveau caractère auquel eut répondu auſſi un mot tout diférent, la ſcience du calcul auroit paſſé les bornes de l'eſprit humain, & l'on n'auroit jamais pû s'élever qu'à des nombres très médiocres. Que convenoit-il donc de faire ? il falloit donner comme on l'a fait des noms & des ſignes diférents aux prémiers nombres, leſquels on peut aiſément ſe rendre familiers, par les divers rapports qu'ils ont entr'eux, & qu'il eſt facile de connoitre diſtinctement ; joindre ſouvent l'idée du caractère à l'idée du mot & l'idée du mot à l'idée du nombre qu'il exprime. Et comme on a occaſion d'abréger les noms des nombres auſſi bien que les caractères écrits, je commencerai par ces derniers, parce que l'ordre le demande abſolument, ainſi que vous le le verrez bien-tôt.

Voici donc de quelle maniére on doit s'y prendre. 1.° Que l'on aye les prémiers nom-

nombres en comptant l'unité, en sorte que le dernier soit médiocrement grand à discrétion. 2° Que l'on exprime l'unité & chacun de ces nombres par des caractères diférents que l'on appellera chifres. 3° Les nombres qui suivent le dernier des chifres ne seront pas exprimés par de nouveaux caractères, mais on combinera ces chifres élémentaires de maniére qu'on puisse, par leurs divers arrangemens, connoitre tous les autres nombres donnés par une valeur locale que l'on attribuera aux chifres déja inventés. C'est pourquoi 4° il faut expliquer cette méthode de la maniére suivante. On prendra l'unité pour le prémier terme d'une progression Géométrique, un nombre pour le second, le quarré, cube &c. de ce nombre pour les termes suivants, & la progression sera indéterminée pour le nombre des termes. Mais comme les nombres font une progression Arithmétique dont le prémier terme est l'unité, & la diférence aussi l'unité, on aura ici deux progressions jointes ensemble, de telle façon que les nombres compris entre l'unité, prémier terme de chacune des deux progressions, & le second terme de la progression Géométrique s'appelleront nombres du prémier ter-

terme; les nombres entre le second terme & le troisiéme, nombres du second terme; ceux qui se trouvent entre le troisiéme & le quatriéme terme, nombres du troisiéme terme, & ainsi de suite. L'unité avec les nombres du prémier terme s'exprimeront par le moyen des chifres élémentaires. Le second terme Géométrique qui est le dernier des nombres du prémier terme plus l'unité s'exprime par le moyen du chifre qui représente l'unité, & d'un chifre appellé zero, de maniére que celui-ci soit à la droite: & cela veut dire que l'on a le second terme pris une fois, c'est pourquoi on met l'unité au second rang à la gauche; le prémier nombre du second terme par l'unité du second rang & par l'unité du prémier, le suivant par l'unité du second rang & par le chifre qui exprime le nombre deux. Quand on est parvenu à un nombre égal au double du second terme, on a le chifre du nombre *deux* au second rang à la gauche & un zero pour marquer que le second terme est pris deux fois exactement, & assigner au chifre sa valeur: ajoûtant l'unité, on change le zero en chifre qui vaut l'unité, puis en celui qui vaut *deux*, &c. jusqu'à ce qu'on ait le

triple.

triple du ſecond terme, après cela on prend le quadruple & toutes les fois qu'on prend exactement un multiple du ſecond terme, on exprime ce multiple avec un zero à la droite & un chifre qui ſuit. Etant arrivé au dernier chifre dans le ſecond rang & dans le prémier, on n'invente pas un nouveau chifre; mais on met l'unité du troiſiéme terme au troiſiéme rang, en commencant par la droite & deux zero pour tenir le ſecond & le prémier. En effet c'eſt le troiſiéme terme qu'on a maintenant, puiſqu'on a pris le ſecond terme autant de fois qu'il contenoit d'unités. Le ſecond terme étant le dernier chifre & l'unité, on a pris le ſecond terme autant de fois qu'il y avoit d'unités dans le nombre exprimé par ce dernier chifre, & ſi l'on ajoûte encore l'unité au plus grand chifre qui eſt au prémier rang, on a le ſecond terme pris une fois de plus qu'il n'y a d'unités dans le nombre exprimé par le plus grand chifre. Donc on a le troiſiéme terme, ce qu'il falloit prouver. Si l'on ſuit ce raiſonnement, on verra que le quatriéme terme doit être placé au quatriéme rang avec trois zero pour remplir les intervalles vuides, & de même pour

pour tous les autres termes. Cela étant, quand je vois une ligne horizontale de chifres placés de ſuite & les uns à côté des autres, je compte le nombre des chifres, & je vois que le terme de la progreſſion Géométrique a été pris pour le moins une fois; & pour voir combien de fois on l'a pris, je regarde le prémier chifre à la gauche, & autant qu'il déſigne d'unités, c'eſt autant de fois que ce terme a été pris. Je vais au ſecond rang & je vois que le terme ſuivant n'a pas été pris, s'il y a un zero, ou qu'il a été pris une ou pluſieurs fois s'il eſt rempli par un chifre qui peut être égal & même plus grand que le prémier; je paſſe au troiſiéme rang, puis au quatriéme juſqu'au dernier, & je connois ainſi la valeur du nombre propoſé. Il eſt évident que par cette méthode je puis exprimer tous les nombres poſſibles: car tout nombre eſt un aſſemblage déterminé d'unités, c'eſt un nombre du prémier terme, & alors il s'exprime par un chifre, ou c'eſt un nombre du ſecond terme, le troiſiéme ou un nombre du troiſiéme, ou c'eſt un multiple d'un terme de la progreſſion. Mais dans tous ces cas il eſt manifeſte que l'on pourra exprimer ce nombre par chifres

fres, de la maniére que nous venons d'indiquer.

On peut par une seule unité faire qu'un terme de la progression en devienne un autre, & alors ce nombre s'exprime par le plus grand chifre pris plusieurs fois, en sorte que l'unité ajoûtée au dernier rang à la droite fera le second terme pris une fois, & le zero remplace cette unité qui va se joindre au second terme; mais le second terme est déja pris autant de fois qu'il le faut pour conserver son rang; il le quitte donc par cette addition, & se place au troisiéme rang; cette unité du troisiéme terme achéve de faire le quatriéme, & donne enfin l'unité d'un nouveau terme qui est celui qui suit immédiatement le plus grand. On observe donc exactement de ne mettre dans un rang que le terme qui lui convient pris pour le plus autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant de la progression moins un; & pour le moins, une fois.

Après avoir ainsi établi d'une maniére générale la nature de la progression Géométrique & Arithmétique des nombres, il sera bon de l'examiner en détail, & plus particuliérement celle dont nous avons

avons coûtume de nous ſervir, & qui s'appelle la *progreſſion Decuple* dont le prémier terme eſt l'unité, le ſecond *dix*, lequel nombre eſt médiocrement compoſé & ſemble avoir été aſſés bien choiſi; mais il eſt plus que probable que cette numeration vient de la méthode encore uſitée de compter ſur ſes doigts, puiſque pluſieurs perſonnes ſont convenues comme faitement de recommencer dès le nombre *dix*, ſur tout dans les chifres. Quoiqu'il en ſoit, nous avons ces dix caractères pour exprimer toute ſorte de nombres, ſavoir 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Ainſi par exemple je vois que ce nombre 1742 c'eſt le quatriéme terme, ſept fois le troiſiéme, quatre fois le ſecond & deux fois le prémier 103. veut dire que le troiſiéme terme eſt pris une fois avec le triple du prémier, & comme ce triple eſt moins que le ſecond terme, pour faire que le troiſiéme terme ſoit au troiſiéme rang, on met un zero au milieu.

On donne des noms à ces termes, le prémier s'appelle *unité*, le ſecond *dixaine*, le troiſiéme *centaine*, le quatriéme *mille*, le cinquiéme *dixaine de mille*, le ſixiéme *centaine de mille*, le ſeptiéme *million*,

*lion*, le huitiéme *dixaine de million*, le neuviémē *centaine de million*, le dixiéme *milles millions*, le onziéme *dix milles millions*, le douziéme *cent milles millions*, le treiſiéme *millions de fois million* ou *bilion*, le quatorziéme *dixaine de bilions*, le quinziéme *centaine de bilions*, le ſeiziéme *mille bilions*, le dix-ſeptiéme *dixaine de mille bilions*, le dix-huitiéme *centaine de milles bilions*, le dix-neuviéme *million de bilions* ou *trilion* : & ainſi de ſuite. De ſix termes en ſix termes on aura milion bilion, trilion, quatrilion, quintilion &c. De trois en trois on aura mille, ſavoir dixaines, centaines, milles; les mots qui expriment les nombres ſont en plus grande quantité que les chifres; mais cependant il y en a très peu.

Si l'on avoit pris pour ſecond terme de la progreſſion numerique le nombre 9, par exemple, & qu'on eut exprimé les chifres de la même maniére 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 0. On auroit 9 = 10. 10 = 11. 11 = 12. 12 = 13. 13 = 14. 14 = 15. 15 = 16. 16 = 17. 17 = 18. 18 = 20. 19 = 21. 20 = 22. 21 = 23 22 = 24. 23 = 25. 24 = 26. 25 = 27. 26 = 28. 27 = 30. 28 = 31. 29 = 32. 30 = 33. 31 = 34. 32 = 35. 33 = 36



Digitized by Google

34=37. 35=38. 36=40. 37=41.
41=45. 42=46. 43=47. 44=48.
45=50. 46=51. 47=52. 48=53.
49=54. 50=55. 51=56. 52=57.
53=58. 54=60. 55=61. 56=62.
57=63. 58=64. 59=65. 60=66.
61=67. 62=68. 63=70. 64=71.
65=72. 66=73. 67=74. 68=75.
69=76. 70=77. 71=78. 72=80.
73=81. 74=82. 75=83. 76=84.
77=85. 78=86. 79=87. 80=88.
81=100. 729=1000. 6561=10000

&c. c'eſt-à-dire que ſi au lieu de *dix*, expoſant de notre progreſſion, nous avions pris 9, nous aurions exprimé par ces chifres 100 ce que nous déſignons maintenant par le chifre 81. Le nombre ſeroit bien toujours le même, mais exprimé diféremment. En effet; 81 c'eſt le quarré de 9 expoſant de cette progreſſion, c'eſt donc le troiſiéme terme pris une fois: on auroit donc mis l'unité au troiſiéme rang, & deux zeros aux deux ſuivants, en commençant par la gauche. On auroit exprimé par 10 ce que nous exprimons par 9, & à ce ſigne 10 on auroit attaché préciſément la même idée que l'on a de 9, ſavoir que 10=3+3+3 comme nous diſons 10=5+5.

Ces

Ces obſervations font bien ſentir la différence totale qu'il y a entre les idées de l'entendement & celles de l'imagination, & principalement la force que ces derniéres ont ſur nous ; car il eſt de fait qu'on a d'abord de la peine à ſe figurer comment l'on peut avoir 100 = 81 &c. Je vais en donner encore quelques exemples.

Le ſecond terme de la progreſſion étant 4, on a 1 = 1,2 = 2. 3 = 3. 4 = 10. 5 = 11. 6 = 12. 7 = 13. 8 = 20. 9 = 21. 10 = 22. 11 = 23. 12 = 30. 13 = 31. 14 = 32. 15 = 33. 16 = 100. 17 = 101. 18 = 102. 19 = 103. 20 = 110. 21 = 111. 22 = 112. 23 = 113. 24 = 120. 25 = 121. 26 = 122. 27 = 123. 28 = 130. 29 = 131. 30 = 132. 31 = 133. 32 = 200. 33 = 201. 34 = 202. 35 = 203. 36 = 210. 37 = 211. 38 = 212. 39 = 213. 40 = 220. 41 = 221. 42 = 222. 43 = 223. 44 = 230. 45 = 231. 46 = 232. 47 = 233. 48 = 300. 49 = 301. 50 = 302. 51 = 303. 52 = 310. 53 = 311. 54 = 312. 55 = 313. 56 = 320. 57 = 321. 58 = 322. 59 = 323. 60 = 330. 61 = 331.



Digitized by Google

62 = 332. 63 = 333. 64 = 1000. Les termes 1. 10. 100. 1000. 10000. ſont l'unité & les puiſſances de 4, ſavoir 4. 16. 64. 256. Je fais une troiſiéme ſuppoſition. Soit *un*, *deux*, *quatre*, *huit*, *ſeize* &c. 1 = 1. 2 = 10. 3 = 11. 4 = 100. 5 = 101. 6 = 110. 7 = 111. 8 = 1000. 9 = 1001. 10 = 1010. 11 = 1011. 12 = 1100. 13 = 1101. 14 = 1110. 15 = 1111. 16 = 10000. 17 = 10001. 18 = 10010. 19 = 10011. 20 = 10100. 21 = 10101. 22 = 10110. 23 = 10111. 24 = 11000. 25 = 11001. 26 = 11011. 27 = 11011. 28 = 11100. 29 = 11101. 30 = 11110. 31 = 11111. 32 = 100000. On trouvera par la même méthode 64 = 1000000. 128 = 10000000 &c. Pour quatriéme & derniére ſuppoſition, ſoit l'expoſant égal à quarante; il faudra inventer tout autant de chifres qu'il contient lui même d'unités. Dans ce cas 40 = 10, 1600 = 100, 64000 = 1000, 2560000 = 10000 &c. Chacun voit aiſément que cette derniére méthode eſt très embaraſſante, & qu'il ſeroit bien difficile de s'en ſervir, ſur tout pour exprimer de grands nombres, quoi qu'on pût le faire avec moins de chifres. On peut voir encore

ſi notre progreſſion decuple a été bien choiſie ou non, & faire là-deſſus les réflexions que l'on trouvera à propos. Pour moi je ne vous ai propoſé ces exemples que pour vous faire mieux ſentir tout ce qu'il y a d'arbitraire dans la progreſſion numerique, & à laquelle on eſt ſi fort accoûtumé, que bien des gens n'ont jamais penſé qu'il pût y en avoir d'autres que celle qui eſt établie par l'uſage commun.

Parlons maintenant des avantages que l'on peut retirer de cette eſpèce de progreſſions pour faciliter les règles de l'Arithmétique, puiſque par ce moyen, on vient non ſeulement à bout d'exprimer la valeur d'un nombre quelque grand qu'il puiſſe être, mais encore de faire ſur toutes ſortes de nombres les opérations dont nous avons parlé d'une maniére générale, ſavoir l'addition, la multiplication, la ſouſtraction, la diviſion, les règles de trois, de compagnie, d'intérêt, de change &c. que les Arithméticiens mettent en pratique, auſſi bien que le calcul des fractions, l'extraction des racines & autres problèmes de cette nature ſur tout ce qui regarde les grandeurs déterminées.

Avant

Avant que de commencer ces opérations, il faut établir quelques principes. 1° L'addition de deux nombres du prémier terme, ou du prémier avec un de ce même terme fait un nombre du prémier terme, le second, ou un nombre du second; mais on n'aura jamais le troisiéme terme, parce que valant dix fois le second, les deux nombres ajoûtés sont moindres que le second, donc la somme moindre que le double du second, sera par conséquent moindre que le troisiéme. 2° La somme de la progression depuis l'unité jusques au dernier nombre du prémier terme ne fait pas le troisiéme terme. Car $9 + 1 = 10$, somme des extrêmes, multipliés par $4 + \frac{1}{2}$, moitié du nombre des termes, fait 45 qui est moindre que le troisiéme terme. Mais il n'en est pas de même des autres; car, par exemple, la partie de la progression depuis 10 jusques à 99 vaut plus que 1000, & ainsi du reste. 3° La somme des termes depuis l'unité jusques au troisiéme terme ne fera pas le cinquiéme terme. Car le troisiéme plus l'unité c'est $100 + 1 = 101$, & multiplié par 50, moitié du nombre des termes, on n'aura pas le quarré de 100. Ce qu'il falloit dé-

montrer. 4° Deux nombres retranchés l'un de l'autre, si chacun est moindre que 10, donnent pour reste, 0, 1, ou un nombre moindre que 9. 5° Deux nombres du prémier terme donnent un produit moindre que le troisiéme terme. En effet le troisiéme c'est le quarré du second, or chacun des facteurs est moindre que le second terme, donc le produit est moindre que le troisiéme terme. 6° Si l'on divise deux nombres du prémier terme, on a pour quotient l'unité, ou un nombre du prémier terme. 7° Pour donner un rang dans la progression à une quantité déterminée, mais inconnue, on commence par prendre indifféremment quelle de ses unités que l'on voudra, & quand on en a dix, on continue par onze, douze, cent, mille, dix mille &c. ensorte qu'à chaque unité ajoûtée, il faut changer de nombres, jusques à ce que toutes étant prises ensemble, on voit par quel nombre leur assemblage doit être exprimé. 8° On détermine la valeur d'un nombre exprimé par chifres de la maniére suivante. Il faut en commençant de la droite à la gauche diviser les chifres de trois en trois; & qaand on est arrivé à l'autre bout, il

peut

peut reſter un chifre, comme dans ce nombre 5623, ou deux (56234) ou enfin ne rien reſter (562432) &c. On fera enſuite une marque de ſix en ſix, c'eſt-à-dire de deux en deux ternaires, ces marques repréſentent million, bilion, trilion, quatrilion, quintilion, ſextilion &c. & les chifres s'expriment par unités, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, centaine de mille, million, &c. ſuivant cela, le nombre 56009,,,, 800242,,, 835678,, 961523, 546021 étant donné, je le range de cette maniére, 56, 009''',800,242''', 835,678'',961,523', 546,021. après quoi je dis que ce nombre vaut cinquante ſix mille neuf quadrilions, huit cents mille deux cent quarante deux trilions, huit cents trente cinq mille ſix cent ſeptante huit bilions, neuf cents ſoixante-un mille cinq cents vingt trois millions, cinq cents quarante ſix mille vingt-un. 9° Un nombre étant propoſé, l'exprimer par chifres; ſoit, par exemple, ſoixante cinq trilions, ſix bilions, neuf cents quatre vingts ſix mille deux cents quarante trois millions, ſix cents ſeptante mille & quatre. Je fais d'abord (65'''), & comme il n'y a que ſix unités de bilions, je mets cinq zeros

ros entre 65 & 6 (65‴000006″) puis j'ajoûte (986243″) & enfin (670004) en tout 65‴000,006″ 986, 243′, 670, 004; & ſans aucune marque 6500000 698624 3670004.

Ayant cet autre nombre, dix trilions, deux bilions, un million & mille, je l'exprime de cette maniére 10‴000, 002″ 000, 001′, 000, 1000000 2000001001000. On voit clairement que par cette méthode on pourra exprimer par chifres quelque nombre donné que ce puiſſe être. Il n'eſt pas moins évident que tout nombre exprimé par chifres peut être connu très déterminément & juſques à l'unité près : c'eſt pourquoi on cherche à ſavoir ce qui reſulte de l'addition, multiplication, ſouſtraction & diviſion des nombres les uns par les autres; c'eſt auſſi ce qu'il faudra examiner après que nous aurons vû en peu de mots la maniére d'opérer ſur les chifres, & qui ſert de fondement aux règles que nous allons donner.

1°. Ajoûtant pluſieurs zeros enſemble la ſomme eſt zero; car puiſque dans les parties il ne ſe trouve aucune grandeur il ne peut y en avoir dans le tout qui n'eſt autre choſe que leur aſſemblage.

2°.

2° Ajoûtant un chifre avec un zero, la ſomme eſt le chifre ajoûté, ainſi 7 + 0 = 7. 3° Si l'on ajoûte deux chifres enſemble, la ſomme s'exprimera par celui qui deſigne le nombre égal aux deux que l'on a dû ajoûter. 4° Otant zero de zero le reſte eſt zero. 5° Otant un chifre d'un autre chifre, le reſte eſt zero ſi ce ſont les mêmes, mais s'ils ſont différens, il faut que celui qui eſt ôté, exprime un plus petit nombre que celui duquel on veut le retrancher, le reſte eſt alors un chifre. 6° Multipliant zero par zero le produit eſt auſſi zero, de même o multiplié par un chifre ou un chifre par zero, on a toujours o. 7° La même choſe a lieu par rapport à la diviſion. 8° Dans l'addition & multiplication, la ſomme ou produit de deux chifres peut donner un nombre du prémier ou du ſecond terme, mais dans la ſouſtraction & dans la diviſion, on ne peut avoir que zero, le prémier terme, ou un nombre du prémier.

## DE L'ADDITION.

Pluſieurs nombres étants donnés avec le rang qu'ils tiennent dans la progreſſion numerique, trouver la valeur de

leur ſomme & l'exprimer auſſi par chifres.

## SOLUTION.

Il faut d'abord écrire les nombres propoſés, & les placer les uns ſous les autres, en telle ſorte que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines &c. Enſuite on commencera à opérer par la droite en ajoûtant ſucceſſivement de bas en haut, ou de haut en bas indifférement & deux à deux, tous les chifres qui ſont au prémier rang: par un des Problèmes précédens on pourra exprimer par chifres cette ſomme partiale, & l'on a ſuppoſé de plus que l'on ſavoit ajoûter ſans le ſecours d'aucune règle un nombre du prémier terme à un autre nombre quelconque. Il faudra donc poſer le prémier chifre à la droite de cette ſomme partiale au bas des nombres à ajoûter où l'on aura tiré une ligne horizontale pour mieux diſtinguer l'aſſemblage ou la ſomme totale des parties qui la compoſent.

Mais comme il arrive très ſouvent que la ſomme des parties exprimées par celle des

des chifres du prémier rang excede la valeur du prémier terme & s'exprime conſéquemment par pluſieurs chifres, dans ce cas on ajoûtera à ce reſte dont chaque unité vaut une dixaine toutes celles du ſecond rang ; ce qui étant fait, on mettra le prémier chifre qui exprime le nombre des dixaines à côté du chifre déja poſé de la ſomme cherchée, après quoi retenant les centaines reſtantes s'il y en a, & autant qu'il y en aura, pour les joindre aux unités du troiſiéme rang qui valent des centaines dont la ſomme étant exprimée par chifres, on ajoûtera celui qui eſt le plus à la droite au cas qu'il y en ait pluſieurs aux deux déja poſés, & qui font partie de la ſomme inconnue. On continuera à opérer de la même maniére juſques à-ce que l'on ſoit parvenu au dernier rang, alors on poſera la ſomme des unités de ce dernier avec le reſte de celles du précédent s'il y en a un, & cela encore dans le même ordre qu'auparavant. Il faut prouver que par cette méthode on aura la ſomme que l'on cherche.

## DEMONSTRATION.

Si l'on a ſuivi l'opération, on a pris toutes les unités, toutes les dixaines, toutes les centaines &c. des nombres à ajoûter, on a donc la valeur de tous ces nombres pris conjointement; & comme on n'a mis dans les chifres qui doivent exprimer la ſomme que ce qui ſe pouvoit mettre dans chaque rang, reſervant ce qu'il y avoit de trop pour les rangs ſuivans, on n'a point changé la valeur des ſommes partiales de chacun de ces rangs, & on a exprimé par chifres la ſomme cherchée: on a donc fait ce que l'on demandoit.

Je remarque dans l'addition 1° qu'un des nombres à ajoûter peut être plus grand que tous les autres pris enſemble, & les ſurpaſſer même de beaucoup, auquel cas il y aura des intervalles vuides du côté gauche que l'on ne remplira point par des zeros, puiſque l'on n'en met aucun après le dernier chifre d'un nombre; on ajoûtera donc comme à l'ordinaire les unités des termes qui ſe trouvent dans un nombre partial, & qui ne ſe trouvent pas dans un autre. 2° On peut, comme nous

nous l'avons déja insinué, connoitre toujours aisément ce que vaut l'addition de deux chifres quelconques & dans quelques rangs qu'ils soient, parce que le plus grand étant 9, la plus grande somme c'est 18 unités, 18 dixaines, 18 centaines &c. Il est donc aisé de dire, 18 mille & sept mille sont 25 mille, & si on lui ajoûte 9 mille on aura 34 mille &c, il est dis-je tout aussi aisé de faire cette addition que si on n'avoit que des nombres du prémier terme. 3° Les commençans, & même tous ceux qui n'ont pas encore mis en pratique la méthode que je vais indiquer, doivent s'accoûtumer à nommer en opérant les termes de la progression numerique dans chaque rang où ils se trouvent, au lieu que pour l'ordinaire il semble que l'on regarde tous les chifres comme des unités: par ce moyen on se familiarisera beaucoup avec le fondement des règles, & l'on opérera plus par bon sens que par routine. 4° Quand le nombre des parties à ajoûter est extrêmement grand, il faut les partager en plusieurs bandes comme de 6 en 6, de 10 en 10 suivant qu'on le jugera convenable, opérer séparément sur chacune & ajoûter toutes les sommes partiales dont

l'assemblage total donnera le même nombre que si on avoit opéré tout d'un coup. 5° On peut pour plus grande commodité en ajoûtant deux ou trois nombres si leur somme est, par exemple, 17 ou 26 &c. mettre un point ou bien deux à côté du second ou troisiéme chifre pour marquer les dixaines restantes, & on ajoûtera le reste avec le chifre suivant, observant la même chose jusques au dernier chifre; & avant que de passer à un autre rang on posera le nombre indiqué par l'opération; or pour savoir ce qui reste il faudra compter les points qui se trouveront dans le prémier rang, ce seront tout autant de dixaines restantes à ajoûter au rang suivant, sur lequel comme sur tous les autres on reïtérera ce que l'on vient de faire au prémier. Cette méthode comme on le voit, est très aisée & de plus très utile, parce qu'en la suivant il n'est pas aussi facile de se tromper. 7° On a plusieurs moiens pour s'assûrer si l'addition a été bien faite; il faut faire le calcul en divers tems & en différentes maniéres, en haut, en bas, & par différentes divisions de nombres, comme si on les avoit divisé de 5 en 5, les diviser de 3 en 3 ou

de 6 en 6 &c. Ajoutés à cela la preuve qui se fait par la soustraction, la preuve par 9 dont nous parlerons plus bas, & enfin quand la même opération se fera en plusieurs façons par plusieurs personnes, toutes ces précautions réunies ne sauroient nous en imposer, & il seroit, pour ainsi dire, contradictoire qu'il se trouvât tant d'uniformité dans toutes ces mépriſes. Voilà qui suffit pour l'addition; nous parlerons après ceci des autres operations de l'Arithmetique, & me reservant d'expliquer les fondemens de la preuve par 9 après que j'aurai parlé de la division, car elle peut s'apliquer aux quatre prémières Régles comme nous le verrons en son lieu.

## *ENTRETIEN XX.*

MATHESIUS.

DEux nombres etants donnés, on cherche à connoitre la valeur de leur produit. Pour resoudre ce Problême, il faut écrire les deux facteurs l'un sous l'autre, & pour plus de commodité, le plus petit sous le plus grand en observant

vant le même ordre par rapport à la disposition des chifres dans l'addition : On multipliera ensuite châque chifre du multipliant par-châcun de ceux du multiplié, & il est clair que l'on aura dans la somme de ces produits partiaux le produit total que l'on cherchoit. En effet, il n'y a point de chifres qui ne soit ou zéro ou quelque partie de l'un ou de l'autre de deux facteurs, si donc il n'y a point de zéros, on aura multiplié châque terme du multinome *multiplié* par châcun de ceux du multinome *multipliant*, c'est à dire les deux multinomes l'un par l'autre, ce qui donne le véritable produit. Quand on a des zéros comme $0 \times 0 = 0$, $5 \times 0 = 0$, $0 \times 5 = 0$ &c. tous les termes qui manqueront dans un des facteurs donneront, si on les multiplie par-châcun de ceux de l'autre facteur ; tout autant de zéros, & ainsi c'est comme si l'on n'avoit pas multiplié. Il ne reste donc plus qu'à faire voir si la manière d'assembler ces produits partiaux ne change rien à leur valeur ; & si on peut le démontrer, on aura fait voir par là même qu'en suivant les Régles que l'on va proposer on trouvera toujours le produit de deux nombres donnés.

SOLU-

Digitized by Google

## SOLUTION.

Le produit du prémièr chifre, à la droite, du multipliant par le prémier du multiplié s'éxprime par un ou deux chifres tout au plus. S'il y en a deux, je poſe le prémier, pour commencer mon produit, & je retiens le ſecond que j'ajoute au produit du prémier chifre du multipliant par le ſecond du multiplié, je poſe le prémier chifre de cette ſomme s'il y en a deux, pour ſecond chifre de mon produit, & retenant le reſte je le joins au produit du prémier chifre du multipliant par le troiſiéme du multiplié, & ainſi de ſuite juſques au dernier; cela étant, j'ai le produit du prémier chifre du ſecond facteur par toute la valeur du prémier: pour ſeconde operation, je multiplie le ſecond chifre du multipliant par le prémier du multiplié, je poſe le prémier chifre ſous le ſecond de mon produit déja trouvé, & le reſte, s'il y en a, je le joins au produit du ſecond chifre du multipliant par le ſecond du multiplié, poſant le prémier chifre ſous le troiſiéme du prémier produit, & j'achéve de là même maniére

le

Digitized by Google

le ſecond produit ; je multiplie après cela le troiſiéme chifre du multipliant par le prémier du multiplié, & je mets le prémier chifre de ce produit ſous le ſecond chifre du ſecond produit, continuant comme dans les deux prémiers, il en ſera de même des autres : Enfin j'ajoute tous ces produits partiaux en ſuivant les régles de l'addition, & la ſomme totale donne le produit total. C'eſt ce que l'on va démontrer.

Le produit du prémier chifre du multipliant par le prémier du multiplié c'eſt o, ou le prémier terme, ou un nombre de ce prémier, ou le ſecond terme ou le ſecond & le prémier ſoit un de ſes multiples, ou un multiple du ſecond juſques à 9 ſans reſte, ou enfin ce même nombre avec ce qui peut lui être ajouté. Or dans tous ces cas, on mettra le chifre qui vient à la droite pour prémier chifre du produit partial du prémier facteur par le prémier chifre du ſecond facteur, ce qui eſt bien évident, & ce ſera auſſi la plus petite partie du produit total, puiſque la moindre valeur ſe met à la droite, & que le produit des deux prémiers chifres de ce côté là eſt celui par lequel on commence. Or quand il y a un

un zéro au ſecond facteur, tous les produits partiaux de chaque chifre du multiplié par ce zéro du multipliant ſont encore zéro, on eſt ſûr alors, que le produit exprimé par chifre laiſſera un zéro pour ſa plus petite partie; il eſt aiſé de voir que la même choſe a lieu en quelque rang que puiſſent être les zéros qui ſe trouvent dans les deux facteurs, il n'y a pour cela qu'à ſe ſouvenir que quand on voit un zéro, ce caractère indique le défaut d'un terme de la progreſſion. Le produit du ſecond chifre du multipliant par le prémier du multiplié donne une ou pluſieurs dixaines ou enfin o, ce produit doit donc etre placé en tout ou en partie ſous le ſecond chifre du prémier qu'à donné la prémiere operation du multiplié par la plus petite partie du multipliant; en effet, ce prémier chifre exprimant des dixaines il faut le placer dans le rang qui lui convient. Il n'y a qu'à examiner bien attentivement toute la ſuite de ce Problème, & on s'appercevra très evidemment que dans la ſolution que l'on vient d'en donner, on n'a rien opéré qui ne conduiſit neceſſairement au but que l'on s'étoit propoſé, c'eſt à dire, la découverte du produit de deux

deux facteurs & le rang qu'on devoit lui assigner dans la progression numerique. Mais sur tout, on ne devra pas tant s'attacher à démontrer cette méthode, qu'à donner plusieurs solutions de ce Problème. Mieux on connoitra la nature de la multiplication, & de la progression numerique, mieux aussi on sera en état de s'appercevoir que l'on peut multiplier les nombres en une infinité de maniéres, & l'on découvrira de soi-même plus de choses à ce sujet que dans les Livres qui en ont le mieux traité.

NEANDER Vous voulés peut-être parler de ces abreviations dont on a de coutume de se servir en pareilles occasions sur tout quand il y a des zéros.

MATHESIUS Elles sont de ce nombre, & je vai vous donner ici quelques exemples de ce que je vous ai dit, où il n'entrera pour ainsi dire, que le simple raisonnement. J'ai à multiplier 900 par 15, c'est à dire que je cherche deux produits dont les facteurs soient $900 \times 10$ & $900 \times 5$, ce qui fait 9000 & la moitié de ce même nombre, en tout 13500; & à le considerer d'une autre maniére $900 \times 5$ c'est 5000 moins 500 c'est à dire 4500, mais $9000 + 4500 = 13500$.

Donc

Donc &c. De plus, ſi je dis 900 pris 15 fois c'eſt moins que 15000, & pour en connoitre la difference, je cherche celle de 1000 à 900 qui eſt 100, il s'en manque donc 1500 que 900 × 15 = 14000, on vera que 15000 — 1500 = 13500. Je veux multiplier 1600 par 3000, le produit doit être 4800000, car 1600 × 1000 c'eſt 1600000, & le triple de ce produit fait 4800000. En général, quand on multiplie des nombres qui ont des zéros à la fin, on ne fait que multiplier les chifres & ajouter les zéros après le produit trouvé, ce qui donnera le produit total que l'on demandoit. Car puiſqu'il y a des zéros dans les facteurs, il eſt clair que le produit par les chifres donne ſeulement le nombre qu'on auroit, s'il n'y avoit pas ces zéros, il faut donc mettre autant de zéros qu'il y en a dans le multiplié, & ce nombre étant pris encore dix, cent, mille fois &c. dans le multipliant, on devra ajouter également les zéros de cet autre facteur. Ainſi le produit de 300 par 20 c'eſt 6000, car l'on prend d'abord 3 deux fois ce qui fait 6 unités du prémier terme; mais le multiplié contient des unités du troiſiéme terme, on aura

aura donc 6 unités de ce même terme, en ajoutant deux zéros au produit 3 × 2; De plus les trois centaines du prémier facteur sont prises 2 dixaines de fois, on aura donc par conſequent 2 unités du ſecond terme pour-multipliant, & 3 du terme ſuivant pour multiplié, c'eſt à dire 6 fois le quatriéme terme, comme il eſt évident, ainſi il faudra dans ce cas, & dans tous les autres ſemblables ajouter tous les zéros qui ſont à la fin des deux facteurs, au produit de ces deux mêmes facteurs dont on les aura retranchés.

Soit 1002 à multiplier par 120, je pourrai ne faire qu'une ſeule operation, c'eſt à dire multiplier tout d'uu coup le ſecond facteur par châque chifre du multiplié en diſant 1002 = 1000 + 2, 2 pris 120 fois c'eſt 240 je poſe (0) & je retiens 24 dixaines que je joins en partie au produit de 120 par 0, j'ajoute donc ſeulement 4, & j'ai (40) il reſte 2 centaines à ajouter au produit de 120 par 0, ce qui fait (240) enfin je multiplie 120 par 1 & mettant 120240 le produit total eſt achevé dans une ſeule opération.

Si l'on a 347 à multiplier par lui même,

me, je commence à le multiplier par 100, & j'ai 34700, j'en prens le triple qui eſt 104100 produit de 347 par 300, il me faut encore prendre 347 quarante ſept fois, cela fait d'abord 3470 dont le quadruple indique la valeur de 347 ×40, & enfin prenant 7 fois ce même nombre, quand j'aurai la ſomme de tous ces produits, elle m'indiquera la valeur du produit cherché, ſavoir le quarré de 347. Il eſt bon de s'écarter ainſi quelque fois de la Régle générale, c'eſt le véritable moyen de s'en rapprocher enſuite avec plus de facilité & de certitude, parce qu'on la connoitra d'autant mieux par ſes véritables fondemens.

Les abréviations dont on a de coutume de ſe ſervir ſont des ſuites ſi naturelles des principes qui établiſſent la démonſtration de la Régle, que l'on peut bien ſe paſſer de les donner à une perſonne qui ſe propoſe d'étudier l'Arithmetique par raiſonnement & par démonſtration.

On doit bien poſſeder ce que l'on apelle ordinairement la Table de la Multiplication; mais il faut que ce ſoit le bon ſens & non point la mémoire ſeule qui agiſſe pour cela. On doit ſavoir promp-

ptement & ſans peine quel produit ſont deux nombres quelconques du prémier terme multipliés l'un par l'autre. Je veux connoitre, par exemple, la valeur de $7 \times 5$. Quand j'ai 7, il s'en manque 3 que ce nombre ne vaille une dixaine, & comme je prens 7 cinq fois, il s'en manque trois fois cinq ou quinze que je n'aye $50 = 10 \times 5$; ſi j'ote 15 il reſte 35, & c'eſt préciſément la valeur du produit de 7 par 5. De même 9 fois 9 ſont 81, car 9 pris 9 fois c'eſt 10 pris 9 fois, & il s'en manque 9, or $90 = 10 \times 9$ moins 9 c'eſt 81, ainſi $9 \times 9 = 81$. Il en eſt de même des autres. Et c'eſt ce que j'avois à dire de plus eſſentiel au ſujet de la multiplication des nombres par chifres.

La ſouſtraction ſe fait de cette maniére. On met l'un ſous l'autre les deux nombres donnés, c'eſt à dire celui que l'on veut ſouſtraire au deſſous du nombre à diminuer, enſorte que les chifres & les rangs des unités dans châque terme ſoient diſpoſés comme dans les deux précédentes opérations. Je commence par la droite & je retranche le prémier chifre inférieur du prémier chifre auſſi du nombre ſuperieur, ſi ce ſont deux zéros,

zéros, je mets un zéro pour le commencement du reſte total, car o = o, ſi c'eſt un chifre moins zéro je poſe le chifre entier, ſi ce ſont deux chifres que l'on ait à retrancher l'un de l'autre, je poſe le chifre reſtant pour reſte de tout celui que je cherche; & au cas que le ſuperieur ſoit plus petit, j'emprunte, c'eſt à dire je prens une dixaine du rang ſuivant pour la joindre avec le zéro ou autre chifre plus petit que l'inferieur qui lui correſpond, ce qui me donne toujours une quantité plus grande que celle du chifre inferieur, après quoi je poſe le chifre reſtant de cette opération qui ſera toujours ſeul & vaudra moins que dix, parce qu'une partie de la dixaine empruntée eſt employée à faire l'égalité avec le chifre inferieur & le reſte ne peut pas valoir autant que dix unités, comme il eſt évident. Il n'eſt pas moins clair que la dixaine empruntée ne doit plus faire partie du nombre exprimé dans le ſecond rang puiſque ſa valeur a déja été priſe entierement; il faudra donc par conſéquent retrancher le ſecond chifre inferieur du ſecond chifre ſupérieur en obſervant de diminuer le ſupérieur de l'unité, ou d'ajouter autant à l'inferieur,

ce

ce qui donnera également dans l'un & dans l'autre cas une dixaine de moins, & l'on empruntera derechef dans cette ſeconde operation, ſi le beſoin le demande, continuant toujours de cette manière juſques à ce que l'operation entiére ſoit achevée.

Il y a pourtant un cas particulier à examiner dans la ſouſtraction, c'eſt qu'il peut arriver que ſi l'on eſt obligé d'emprunter l'unité du rang ſuivant pour l'ajouter à la valeur du précédent, on ne trouvera qu'un zéro dans ce rang, alors il eſt clair que l'on doit paſſer tous les zéros que l'on trouvera en ſon chemin juſques à ce que l'on arrive à un chifre qui exprime l'unité ou un nombre, & c'eſt ce qui ne peut manquer d'arriver dans le dernier de tous; on otera l'unité de ce rang là qui vaut dix fois celle du rang du précédent, j'en laiſſe 9 ſur ce rang, & je me reſerve l'unité qui vaut encore dix fois le rang précedent ſur lequel j'en laiſſe pareillement 9, & ainſi de ſuite juſques à ce que je ſois arrivé au rang où il m'a fallu emprunter, je joins cette unité au chifre ſupérieur du rang qui précéde le ſien, & faiſant la ſouſtraction comme à l'ordinai-

dinaire, je mets le reſte dans la place qui lui convient & tous les zéros que j'ai paſſé ſe trouvent valoir 9 unités, & ſont toujours ſupérieurs ou égaux à ceux de deſſous, de ſorte qu'il n'y a point de nouvel emprunt à faire juſques à ce que l'on ſoit parvenu au lieu où s'eſt fait cet emprunt; il faut diminuer ce rang de l'unité & continuer juſques à la fin, en obſervant toujours les mêmes Régles que nous avons indiquées.

La démonſtration de la Méthode de ſouſtraire les nombres exprimés par chifres eſt très aiſée à comprendre : car il eſt évident que j'ai ôté châque partie du nombre inferieur, c'eſt à dire ſa valeur entiére, de celle du nombre dont je le voulois retrancher, & dans la maniére dont j'ai exprimé ce reſte, je n'ai rien changé à la valeur des reſtes partiaux; ſi l'on a emprunté une dixaine on ne l'a plus comptée, une partie a ſervi pour égaler une certaine partie du nombre inferieur, & le ſurplus on l'a mis pour reſte partial de celui que l'on cherchoit en entier : Si l'on a paſſé pluſieurs zéros pour emprunter ſur un rang plus éloigné, il eſt clair que par la diſtribution faite de cette unité ſur les rangs précédens

on n'a augmenté ni diminué ſa valeur. Ainſi en ſuivant la méthode propoſée on aura toujours le reſte que l'on demande. Mais il faut entrer dans quelque détail & voir ceci d'une façon un peu plus déterminée.

Je veux ôter 202 de 307. $307 = 300 + 7$, & $202 = 200 + 2$ je retranche d'abord 2 de 7 parce que cette partie du nombre à diminuer eſt ſuffiſante pour cette prémière operation, il reſte 5, j'ote enſuite 200 de 300, le reſte eſt 100: donc le reſte total eſt 105. 2° $(6001 - 65)$ $6001 = 6000 + 1$ & $65 = 60 + 5$; comme je ne peux pas ôter 5 de 1 mais de 6000 je prens 10 unités ſur ce nombre là pour les joindre au ſecond terme du Binome $6000 + 1$, ce qui fait onze, après cela je fais la ſouſtraction de onze moins cinq, il reſte 6; j'ote enſuite 60 de $6000 - 10$ ou ce qui revient au même 70 de 6000, pour plus grande facilité je prens une centaine ſur 6000 & j'en ſouſtrais 70, ce qui me fait connoitre que 60 centaines, moins une, plus trente unités valent 5930 qui eſt le reſte total, ſi on lui joint le prémier, reſte 6 de la precédente operation, 5936. Et afin que je ſache ſi j'ai ſuivi les Régles indiquées,

quées, j'ajoûte 5936 avec 65 dont la ſomme 59 centaines, 9 dizaines, 6 & 5 unités, redonne le nombre propoſé 6001; 3° (100000 — 115) 100000 c'eſt 1000 centaines, ſi on en ôte une, il en reſte 999, & ſi on en retranche deux, il n'en reſtera plus que 998, mais la ſeconde centaine n'eſt pas toute employée, on ne ſe ſert que de quinze unités qui laiſſent encore 8 dixaines & 5 unités, le reſte total ſera donc 99885 lequel nombre ajouté à 115 donne 999 centaines 85 + 15 = 100, c'eſt à dire 100000.

Il n'eſt pas néceſſaire que je m'arrête plus longtemps ſur des exemples de cette nature, ils ſont d'une ſimplicité qui les rend pour ainſi dire à la portée de tout le monde: Quand on ſait s'écarter de la routine & enviſager les nombres ſous differentes faces, on n'a pas beſoin de tant d'exemples, on en cherche ſoi même, & l'on va juſques à inventer de nouvelles Régles, & à y découvrir un grand nombre de choſes.

Je dois vous parler enfin de la Diviſion qui paſſe ordinairement pour la plus difficile des quatre prémières Régles de l'Arithmetique. Cela vient de ce qu'il y a

ſouvent un reſte dans la diviſion qui ne peut plus être diviſé, qu'il n'y en a jamais dans les trois autres Régles, au moins quand il s'agit de nombres entiers, & encore de ce que dans une diviſion partiale, on ne doit pas toujours placer le quotient qui devroit ſe trouver naturellement, mais une quantité plus petite, ſuivant certaines Régles que nous allons indiquer.

Pour commencer donc l'explication de cette méthode, je dis que deux nombres étant donnés à diviſer l'un par l'autre, & le dividende étant plus grand que le diviſeur, je prens ſur le dividende (en commençant par la gauche) autant de chifres qu'en contient le diviſeur, & je vois ſi les deux nombres que ces deux chifres expriment, ſont égaux ou non; or le prémier étant égal ou plus grand que le ſecond, je regarde dans ce dernier cas combien de fois la partie du Dividende égale le Diviſeur, ce ſera un quotient entre 0 & 10, pour le moins l'unité, & pour le plus, 9: car le nombre des chifres étant le même de part & d'autre, ſi l'un valoit dix fois autant, il faudroit ajouter au plus petit un zéro pour le rendre égal au plus grand, ſavoir en multipliant

tipliant le quotient dix par le diviſeur, mais alors on auroit un chifre de plus dans le Dividende que dans le Diviſeur, contre la ſuppoſition. Quelquefois il arrive que le Dividende & le Diviſeur ont le même nombre de chifres, & alors on ne fait qu'une ſeule opération, mais quand le Dividende a plus de chifres que le Diviſeur, & qu'en commençant par la gauche, il ſe trouve qu'un nombre de chifres pris ſur le Dividende & égal à celui du Diviſeur, exprime une quantité moindre que le Diviſeur, il faut prendre le chifre qui ſuit immediatement, du même côté, & le joindre à ceux que l'on a déjà, il eſt clair alors que quand même ce nouveau venu ne ſeroit qu'un zéro, il fera pourtant la ſomme dix fois égale à la prémière valeur, & je dis qu'elle ſera dans ce cas plus grande que ſon diviſeur: pour le prouver prenons d'un côté une partie du dividende dans ſa moindre valeur, & un diviſeur d'un même nombre de chifres dans la plus grande où il puiſe être, par exemple 10 & 99, 100 & 999, &c. ce ſeul cas, comme il eſt évident, ſervira très bien pour tous les autres. Il s'agit donc de prouver que la valeur d'un terme de la pro-

greſſion numerique eſt ſuperieure à celle d'un nombre exprimé par 1 autant de chifres moins un qu'il en a falu pour marquer ce terme donné, & tel enfin que le chifre le plus reculé ne contienne que des unités du terme précédent tout au plus. C'eſt ce que l'on comprendra aiſément ſi l'on fait attention que pour paſſer d'un terme de la progreſſion à un autre, il faut avoir un nombre dix fois égal au terme précédent qui s'exprimera en ajoutant un zéro à celui là ; & il eſt bien clair que le nombre du terme anterieur dont la difference avec le terme qui ſuit, pris ſimplement tel qu'il eſt, ſera le plus grand de ceux qui avec un chifre de moins peuvent exprimer au dernier rang des unités d'un certain terme dont l'autre qui a un chifre de plus le ſuit immediatement. Ainſi toutes les fois que l'on ajoutera un chifre à la partie du dividende moindre que le diviſeur, ce chifre auxiliaire le rendra toujours ſuperieur dans tous les cas poſſibles. Ce qu'il faloit démontrer. Mais ce Dividende partial ne pourra pas valoir non plus dix fois le Diviſeur, parce que l'on prendra dix fois une grandeur moindre que lui : or ſuppoſons que la difference de

de ce Dividende partial égal en chifres au Diviſeur & moindre que lui, ne fût que l'unité, il s'en manquera pour le moins 10 unités qu'on n'ait le decuple du Diviſeur, mais le chifre auxiliaire ne peut valoir que 9, donc il s'en manquera toujours quelque choſe que le Dividende partial augmenté d'un chifre, ſuivant la Régle indiquée pour cela, ne ſoit dix fois égal à ſon Diviſeur. J'eclaircirai ceci par un exemple : ſoit le nombre 569231 à diviſer par 57, 1° 56, partie du Dividende qui a deux chifres auſſi bien que le diviſeur, eſt moindre que lui; je lui ajoute le ſuivant qui eſt 9, & il faut faire voir que 569 eſt moindre que dix fois le diviſeur, 56 dixaines de mille valent moins que 57 unités de même eſpeçe, j'ajoute un chifre qui vaut 9 mille, & comme la difference des deux prémière grandeurs eſt une dixaine de mille, il eſt clair que pour l'égaler, l'addition de neuf mille n'y pourra ſuffire, & qu'il s'en manquera toujours mille dans tous les cas de cette eſpece, que les trois prémiers chifres ne vaillent dix fois le Diviſeur.

Quand j'ai trouvé de cette façon le prémier Dividende partial, je cherche

combien de fois il contient le Diviſeur, & j'exprime par un chifre le quotient, qui ainſi que nous venons de le faire voir, ne peut pas valoir dix unités. Cela étant, je dis qu'il y aura autant de chifres plus un, au quotient, qu'il s'en trouve de plus, que dans la partie du Dividende prémièrement priſe; comme par exemple, ſi le Dividende avoit dix chifres & qu'on en eût pris ſept pour faire la prémière diviſion, il y auroit quatre chifres au quotient, ſa valeur ſeroit pour le moins 1000, & ainſi des autres. C'eſt ce qu'il eſt facile de démontrer; car ſi je multiplie un Dividende par 10, le diviſeur demeurant le même, il ſe trouvera que le quotient eſt auſſi multiplié par 10, & puis que châque chifre augmente toujours de dix en dix la valeur du nombre que l'on avoit auparavant, le chifre du quotient partial aura pour le moins autant de zéros après lui qu'il y a de chifres dans le Dividende: il faut prouver maintenant qu'il n'y en aura pas d'avantage. Dejà le quotient de la prémière Diviſion c'eſt 9 pour le plus, & il peut reſter un nombre qui ſoit moindre que le diviſeur de l'unité ſeulement, ce nombre ſera ajouté au chifre

ſuivant

ſuivant qui ne peut valoir que 9 fois le terme qui lui répond, le reſte eſt donc pris dix fois & l'on a neuf fois le terme qui lui eſt prochainement inferieur, mais ce nombre ne peut pas valoir dix fois le Diviſeur, car il s'en manque d'abord 10 que l'on n'ait le diviſeur entier, & le chifre auxiliaire ne peut faire addition que de 9, puis donc que la choſe ne ſauroit avoir lieu dans le cas où il eſt le plus poſſible, à plus forte raiſon le ſera-t-il dans les autres cas, & c'eſt ce que l'on peut remarquer dans toutes les opérations ſuivantes où ce raiſonnement a lieu. Ainſi avant même que d'avoir rien operé, on peut deja s'appercevoir combien de chifres on aura au quotient.

Après avoir vû combien de fois la partie du Dividende contient ſon Diviſeur, le chifre que l'on a, déſigne la plus grande valeur du quotient, puis qu'en commençant par la gauche on a pris la plus grande partie du nombre à diviſer; on multiplie enſuite ce quotient par le Diviſeur, & le produit on le retranche de cette partie du Dividende; ſi la diviſion eſt exacte il ne reſte rien, ſinon on joint le reſte avec le chifre ſuivant, & au cas que la valeur de ce nombre ſoit

moindre que le Diviſeur, on ne va pas reprendre un autre chifre, mais on met un zéro au quotient, & ce zéro multiplié par le diviſeur donne encore zéro, pour troiſiéme opération, j'ajoute un chifre à ce nombre moindre que le diviſeur, & s'il eſt encore plus petit que lui malgré ſon augmentation, j'ajoute un zéro au quotient, continuant ainſi à marquer tantôt un chifre tantôt un zéro juſques à la fin, faiſant toujours une ſouſtraction du produit du quotient partial par le Diviſeur, & joignant le reſte au chifre ſuivant pour diviſer ce nombre par le Diviſeur s'il eſt plus grand que lui, & marquant enfin quand le Dividende entier n'eſt pas multiple de ſon diviſeur le reſte que l'on aura trouvé dans la dernière ſouſtraction.

S'il y a encore quelque obſcurité en cela, on pourra aiſément l'éclaircir par des exemples. Soient les deux nombres à diviſer 17000, 234 = 17000234 & 402, je ne les place point l'un ſur l'autre comme dans les précédentes opérations; mais, en commençant par la gauche, je vois ſi les trois prémiers chifres 170 valent autant que 402, & comme cela n'eſt pas, il faut ajouter un zéro,

ce

ce qui fera 1700 plus grand que 402, mais moindre que 4020 = 402 × 10 c'eſt-à-dire que le decuple du Diviſeur, parce qu'on a pris dix fois 170 moindre que 402. Si je veux ſavoir, avant que l'opération ſoit finie, combien il y aura de chifres au quotient, je vois que c'eſt 5, puis qu'après 1700 il reſte encore 4 chifres dans le Dividende : en effet 1700 eſt plus grand que 402, & il le contient pour le moins une fois, donc 10 fois 1700 ou 17000 le contiendra ſûrement 10 fois; 170000 contiendra cent fois le Diviſeur, & ainſi des autres chifres. Mais pour commencer l'opération, je cherche à peu près combien de fois 1700 contient 402, je remarque que ſi on le prend 4 fois on a 1608, & pris 5 fois il vaut 20 centaines & 10 c'eſt à dire 2010, il n'y eſt donc que 4 fois, j'ôte 1608 de 1700 & il reſte 92; donc le Dividende contient déjà 40000 fois ſon Diviſeur, je joins 92 avec le 0 ſuivant qui fait 920 & vaut le double de 402, je mets donc 2 au quotient après 4 (42) j'ote 804 de 920 il reſte 116, & ce reſte joint avec le chifre auxiliaire 2, j'ai 1162. qui contient 402 2 fois, je mets donc 2 au quotient (422) il reſte 358,

j'y joins le chifre ſuivant 3, ce qui fait 3583, je prens 402 huit fois, le produit eſt 3216 avec 367 de reſte, je mets 8 au quotient (4228) je joins avec 367 le dernier chifre 4, & 3674 je le diviſe par 402, le quotient eſt 9 (42289) & le reſte final eſt 56; ainſi l'opération eſt achevée, on a 17000234: 402 =42289 $+\frac{56}{402}$. pour m'aſſûrer de l'opération, je multiplie le quotient par le Diviſeur & j'ajoute 56 au produit, ce qui me donne juſtement 17000234.

Si vous vous étes rendu bien attentif à la nature de cette opération, vous avés dû remarquer que 17000234 valant 1700 dixaines de mille, il eſt clair que comme 1700 unités valent quatre fois 402, 1700 dixaines de mille contien-dront 402 quatre fois une dixaine de mille, & le prémier reſte 92 dixaines de mille ne faiſoit pas 402 pris dix mille fois, de ſorte qu'ayant joint à un zéro les 92 dixaines de mille reſtantes, on n'a pas rendu le nombre plus grand, mais il s'eſt trouvé contenir 402 autant de mille fois que 920 contient 402, c'eſt à dire au moins 2 mille fois, en effet 920 mille vaut 402 multiplié par 2 mille,

mille, ou 804 mille & 116 mille reſtants qui ne pouvoient contenir 402 que des centaines de fois; le reſte de cette opération joint au chifre ſuivant ne le pouvoit que des dixaines de fois; puis après le pénultiéme reſte ne l'a fait que des unités de fois, & le dernier reſte de cette diviſion inexacte l'a fait enfin des zeros de fois ou aucunes fois &c.

Le fondement de la diviſion conſiſte en ceci, c'eſt que partageant le dividende en pluſieurs termes, on puiſſe voir plus aiſément combien de fois il eſt dans chacun, afin que réuniſſant tous ces quotients partiaux, on ait le nombre de fois que le dividende total contient ſon diviſeur. Pour cela, on prend le plus grand terme du dividende en commençant par la gauche, & l'on continue ainſi à opérer juſques dans les plus petits termes.

NEANDER. Ne pourroit-on pas commencer la diviſion par la droite, comme dans les trois précédentes opérations?

MATHESIUS. On le pourroit, mais avec bien de la peine, à cauſe des divers reſtes qu'il faudroit laiſſer, reprendre, & ajoûter, de même que changer à tout

tout moment le quotient déja trouvé, au lieu que par la méthode ordinaire, on renvoie toujours chaque reſte au chifre ſuivant, & l'on voit combien de fois ce reſte joint à un autre nombre contient le diviſeur, & cela avec une facilité toujours égale, juſques-à la fin de l'opération.

Les preuves de ces quatre opérations ſont reciproques : l'addition ſe prouve par la ſouſtraction, la ſouſtraction par l'addition, la multiplication par la diviſion, & la diviſion par la multiplication. Mais comme on ne peut faire uſage de la prémiére preuve que l'on ne ſache déja la ſouſtraction, ni de la troiſiéme qu'on ne ſache la diviſion ; les Maîtres d'Arithmétique ſe ſervent d'une méthode vulgairement appellée *la preuve de 9* qui eſt bonne, diſent-ils, en attendant que l'on ait appris la ſouſtraction, & la diviſion ; mais dont on peut néanmoins faire uſage dans les quatre règles que nous venons de voir, & c'eſt ce qu'il nous faudra examiner en détail dans la leçon ſuivante.

## ENTRETIEN XXI.

MATHESIUS.

LA preuve par 9 ſe pratique de cette maniére : vous regardés tous les chifres de vos nombres à ajoûter comme ſi c'étoient de ſimples unités, & vous prenés, de quelque maniére que ce puiſſe être, la ſomme de tous ces chifres, en ôtant les neuvaines à meſure qu'on ajoûte; après quoi vous placés un zero au deſſus d'une ligne, ſi la ſomme des chifres eſt 9, ou un de ſes multiples ; ſinon, on aura le reſte de ce nombre dont toutes les neuvaines ſont ôtées ; enfin, on ajoûte les chifres de la ſomme, & ôtant pareillement les neuvaines, le reſte doit être zero, ou le même nombre que l'on avoit trouvé par la précédente opération ; & dans ce cas on conclut que l'opération eſt bien faite, à ſavoir quand les deux reſtes ſont égaux.

Dans la ſouſtraction, on ajoûte les chifres du nombre ſupérieur, & on en ôte les neuvaines, on en fait autant à l'égard du nombre inférieur & du reſte pris

pris enſemble, les deux reſtes d'après les neuvaines doivent être les mêmes pour que l'opération ſoit juſte. Cela eſt ſans difficulté, ſi la prémière preuve de l'addition eſt bonne, car le reſte plus le nombre inférieur eſt toujours égal au prémier qui eſt le ſupérieur. Dans la multiplication, j'ôte les neuvaines du multiplié & les neuvaines du multipliant, je prens le produit des deux reſtes dont j'ôte encore les neuvaines, s'il ſe peut, & je poſe le dernier reſte au deſſus d'une ligne; je viens après cela au produit trouvé dont j'ôte pareillement les neuvaines pour mettre le reſte au deſſous de la ligne: ſi ces deux chifres ſont les mêmes, l'opération a été conforme à la règle. Enfin, pour la diviſion, j'ôte les neuvaines du dividende, & le reſte doit ſe trouver égal à celui du produit des deux reſtes que l'on aura trouvés dans le diviſeur & dans le quotient; c'eſt ce qui eſt bien évident encore, ſi la preuve de la multiplication eſt bonne. Il s'agit préſentement de voir ſur quoi cette preuve eſt fondée, & le degré de force qu'elle doit avoir en l'examinant par ſes propres principes, auſſi bien

bien que le défaut dont on l'accuſe, d'être quelquefois ſujette à caution.

Pour cela, je vais établir une propoſition fondamentale pour tout ce que nous dirons dans la ſuite ſur ce ſujet.

Ayant un nombre exprimé par des chifres qui valent tous zero; à la reſerve du prémier à la gauche; c'eſt à dire un multiple d'un terme de la progreſſion numerique étant donné, dont l'expoſant à ce terme ſoit moindre que 10, je dis que ſi l'on ôte toutes les neuvaines de ce nombre là, on aura le même reſte que ſi on prenoit la ſomme des chifres, ou ce qui eſt ici la même choſe, que ſi l'on prend le prémier chifre, puiſque tous les autres étants des zeros n'ont aucune valeur. Ex. 70000, ôtant les neuvaines de ce nombre, il doit reſter 7, ſomme des chifres de ce même nombre.

Soit un nombre déterminé 70000000 pour tout autre nombre quelconque, pourvû qu'il ait les conditions requiſes; il faut prouver que l'on aura toujours $7+0+0+0+0+0+0+0=7$ égal au reſte qui doit ſe trouver en faiſant 70000000 : 9.

DEM.

DEM. $70000000 = 7000000 \times 10 = 7000000 \times 9 + 7000000 \times 1$. Du nombre proposé je puis donc ôter cette partie $7000000 \times 9$ puisque c'est un multiple de 9, & ne faire attention qu'à la partie restante 7000000; ce nombre est égal à $700000 \times 9 + 700000 \times 1$: j'ôte donc encore $700000 \times 9$, & les 700000 restants valent $70000 \times 9 + 70000 \times 1$ dont je retranche $70000 \times 9$; j'ôte du reste 70000 une partie de sa valeur $7000 \times 9$, & de 7000, pareillement $700 \times 9$; du reste 700, $70 \times 9$, & enfin de 70, ôtant $7 \times 9$, il reste 7. Donc, & c'est ce qu'il falloit démontrer, après avoir ôté les neuvaines d'un nombre tel que 70000000, il doit y avoir le même reste que si l'on prenoit la somme des chifres.

De cette proposition, il suit manifestement que si l'on ôte toutes les neuvaines d'un nombre quelconque exprimé par chifres, le reste sera égal à celui de la somme des chifres dont on aura ôté pareillement les neuvaines. Par exemple, soit 1742, ce nombre est égal aux suivans pris ensemble, $1000 + 700 + 40 + 2$, le reste de 1000 c'est 1,

(par

(par la propoſition précédente) le reſte de 700 eſt 7, celui de 40 c'eſt 4, & enfin il ſe trouve encore 2, ainſi ajoûtant $1 + 7 + 4 + 2$, on a les reſtes des neuvaines, qui par leur aſſemblage pouvants faire encore des neuvaines, on les ôtera de la ſomme; & alors il eſt manifeſte qu'on aura ôté le nombre 9 du nombre propoſé autant de fois qu'il ſe pourra.

Par la même raiſon, pluſieurs nombres étants donnés pour les ajoûter enſemble, il n'y a qu'à prendre la ſomme de tous les chifres dont ces nombres ſont compoſés, & les regarder tous comme s'ils exprimoient de ſimples unités; car quand on auroit par exemple 200000, il ne reſteroit que 2 unités après avoir ôté le plus grand multiple de 9: afin donc que l'on ſoit aſſuré que l'on a bien fait l'opération, il faut que la valeur des chifres pris enſemble, & ajoûtés de la même maniére que dans la ſomme totale, donne un reſte égal à celui qu'on avoit trouvé dans les parties ajoûtées.

Quand à la multiplication, il eſt évident que le Binome $9a + x$ ſavoir un multiple de 9, & un reſte moindre que lui, multiplié par un autre binome $9b$

$+y$

$+y$ donne pour produit $81\ ab + 9\ ay + 9\ bx + xy$. Mais $81\ ab + 9\ ay + 9\ bx$ ſont des multiples de 9 auſſi bien que leur ſomme ; donc en multipliant les deux reſtes l'un par l'autre & ôtant les neuvaines, le reſte du produit ſera le même que celui qui doit ſe trouver dans le produit véritable ; d'où l'on conclut que l'on a ce que l'on demandoit par l'opération.

La même proprieté auroit lieu ſi l'on prenoit une progreſſion différente de la nôtre. Car ſoit $9 = 10$. $10 = 11$. $11 = 12$. $12 = 13$. $13 = 14$. &c. que l'on prenne 13 & 14 dans la progreſſion nonuple qui s'exprimeront dans la nôtre par les chifres 12 & 13 ; je dis que la ſomme des chifres qui eſt neuf, exprime une huitaine & l'unité, que le chifre 27 exprime auſſi un multiple de 8 plus l'unité. Car 27 c'eſt 25 dans notre progreſſion, 25 c'eſt 3 fois huit plus un, & 9, ſomme des deux chifres 2 & 7 vaut une huitaine plus un.

En effet, ſoit 20000 dans la progreſſion nonuple, on a $20000 = 2000 \times 8 + 2000 \times 1$, j'ôte le multiple de 8 ; il reſte 2000 qui valent $200 \times 8 + 200$ $200 = 20 \times 8 + 20$. $20 = 2 \times 8 + 2$.

Ainſi

Ainſi 20000 eſt un multiple de 8 avec 2 unités de reſte.

COR. Cette proprieté n'eſt donc pas eſſentiellement attachée au nombre 9 entant qu'il eſt compoſé de certaines unités; mais cela dépend plûtôt de la progreſſion arbitraire que l'on a voulu choiſir ; & pour que cette proprieté convienne à quelque nombre donné que ce puiſſe être, il n'y a qu'à le faire le pénultiéme terme de la progreſſion, c'eſt-à-dire en ajoûtant l'unité à ce nombre pour en faire l'expoſant.

NEANDER. Cette preuve me paroit immanquable, & cependant vous dites que l'on peut s'y tromper.

MATHESIUS. La choſe eſt très poſſible comme je vâis vous le faire ſentir. C'eſt que par exemple, ſi je mettois un 9 à la place d'un zero, ou un zero à la place d'un 9, ou bien encore, ſi j'oublie de compter 4 & 5, 3 & 6, 2 & 7, 13 & 5, &c. le reſte ſera le même dans les parties que dans la ſomme trouvée, & néanmoins j'aurai mal opéré. Vous ſentés bien que quand j'omettrois une ou pluſieurs neuvaines, le reſte ne ſeroit pas différent, parce que ſa valeur peut auſſi bien ſe trouver quand il y aura moins de neu-

neuvaines que quand il y en aura davantage. Je vais vous en donner des exemples ; ſoient les nombres à ajoûter 102 & 403, la ſomme eſt 505 : je fais la preuve par 9, & j'ai l'unité pour reſte dans les deux nombres à ajoûter, de même que dans la ſomme totale : maintenant, ſi au lieu de 505 j'avois mis 595, j'aurois ôté deux neuvaines & il ſeroit reſté encore l'unité. Je veux multiplier 14 par 19, le produit eſt 266 : les deux facteurs de la ſomme des chifres c'eſt 5 & 1, (à cauſe que 14 a une ſomme de chifres moindre que 9, & que 19 c'eſt $10 = 9 + 1$) le produit eſt 5 qui doit être un reſte égal à celui de la ſomme des chifres du produit 266 ; mais ſi j'avois mis dans le produit 293, il auroit été faux, & il ſeroit tout de même reſté 5. Voilà à quels égards la preuve par 9 peut ſe trouver fauſſe : du reſte, il eſt très probable que dans les cas où elle s'accorde avec l'opération on ne s'eſt pas trompé, parce qu'il n'eſt pas apparent que parmi tant d'erreurs poſſibles, on ſoit venu préciſément à en rencontrer une de celles qui peuvent rendre la preuve fauſſe. D'ailleurs nous ne perdons pas extrêmement par le défaut de cette preuve de

9,

9, il eſt aiſé d'y remedier par pluſieurs autres moyens, comme je vous ai déja dit en parlant de l'addition.

Mais, puiſque nous en ſommes ſur les proprietés du nombre 9, je crois devoir encore ajoûter quel eſt le véritable fondement de celle-ci, qui paroit d'abord aſſés remarquable; c'eſt que ſi l'on change l'ordre des chifres par lequel un nombre eſt exprimé, d'une telle maniére que cela faſſe un nouveau nombre, la diférence de deux de ces nombres pris indifféremment ſera toujours neuf ou un de ſes multiples. Par exemple, ſi l'on prend 162, on peut tranſpoſer ainſi 126, 612, 621, 216, 261, la diférence de 126 à 621, de 612 à 216, de 621 à 126 &c. ſera toujours diviſible par 9. Il faut prouver que cette proprieté aura lieu dans les grands nombres comme dans les plus petits. Pour le comprendre, il n'y a qu'à rappeller la propoſition ſur laquelle eſt fondée la preuve de 9, & l'on verra ſans peine que dans un nombre propoſé quelconque 1742, tous les nombres qui peuvent être exprimés par la combinaiſon de ces quatre chifres auront un même reſte après qu'on en aura ôté les neuvaines: ainſi, 1742 a pour reſtes 1 + 7

Digitized by Google

+4+2, & si l'on fait 4172, il y aura 4+1+7+2, d'où ôtant encore de part & d'autre la neuvaine qui se trouve dans chacun des restes, on a 5 unités de plus.

En effet, quoique par la transposition, on fasse venir unités ce qui étoit des dixaines, & centaines ce qui pouvoit être unités, &c. le reste des neuvaines ôtées demeure le même dans 3000, par exemple, comme dans 300, ou dans 100 comme dans 10, ainsi que nous l'avons fait voir auparavant. Tous ces nombres donc qui resultent de la combinaison des chifres par lesquels est exprimé celui que l'on propose, sont des multiples de neuf sans aucun reste, ou bien ils ont tous le même reste. Par conséquent, si je prends deux de ces nombres, il faut que le plus grand contienne neuf, une ou plusieurs fois de plus que le petit, puisque le reste des neuvaines est le même dans tous deux; ôtant donc le plus petit du plus grand, on retranche d'abord le reste des neuvaines du reste des neuvaines, après quoi viennent les deux multiples de neuf à retrancher l'un de l'autre, c'est-à-dire deux nombres dont les unités sont des neuvaines, il en restera nécessairement une

ou

Digitized by Google

ou plusieurs, c'est-à-dire, neuf ou un de ses multiples. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut se convaincre encore très aisément en algébre de la vérité de cette proposition. Soient ces deux nombres $9a+x$ & $9b+x$, $a$ aussi bien que $b$ peuvent être regardés comme des nombres entiers, exposants des deux raisons $\frac{9a}{1}$ & $\frac{9b}{1}$; j'ôte $9b+x$ de $9a+x$, le reste sera $9a+x-9b-x=9a-9b$: mais 9 c'est l'unité de $a$ & de $b$; donc comme en retranchant deux nombres inégaux, le plus petit du plus grand, le reste est l'unité ou un nombre, de même ôtant $9b$ de $9a$, le reste sera 9, ou un multiple de 9.

La raison pour laquelle cette propriété a lieu, ne vient pas immédiatement de ce que l'on a changé l'ordre des chifres, mais de ce qu'en changeant cet ordre, on a toujours nécessairement un nombre multiple de 9 avec le même reste.

Et afin que l'on comprenne ceci d'une maniére encore plus générale; supposons la progression quintuple, cette propriété se communiquera, pour ainsi dire, au nombre 4. Car soit $5=10$. $6=11$.

7 = 12. 8 = 13. 9 = 14. 10 = 20. 11 = 21. 12 = 22. 13 = 23. 14 = 24. 15 = 30. 16 = 31. &c. je prens 31 & 13, qui dans notre progreſſion valent 16 & 8; je retranche 13 de 31 de cette maniére; on ne peut pas ôter 3 de 1, il faut donc emprunter une quinte, ce qui joint à l'unité fait 6 = 11; de ſix j'ôte 3, & il reſte encore 3; enſuite, de deux quintes j'en ôte une, & le reſte total s'exprime par 13, car 13 = 10 + 3, 10 = 5, donc 13 = 5 + 3 = 8. Or 13 = 8 eſt multiple de 4, & c'eſt la diférence des deux nombres 13 & 31 c'eſt-à-dire, de 8 à 16. Si donc la même choſe a lieu dans les autres nombres, il s'enſuit que cela ne vient pas tant de leur nature que du rang qu'ils tiennent dans la progreſſion numerique ſuivant les expoſans arbitraires dont on ſe ſert; & s'il eſt eſſentiel au nombre 9, que ce ſoit le pénultiéme pour avoir la proprieté dont il s'agit, il ne l'eſt pas moins aux autres, afin qu'en changeant l'ordre des chifres la diférence de deux nombres ainſi exprimés, ſoit le nombre du pénultiéme chifre, ou un de ſes multiples.

NEANDER. Je ſouhaitterois fort d'apprendre les quatre règles d'Arithmétique dans

dans une autre progreſſion choiſie arbitrairement.

MATHESIUS. Quoiqu'il faille pour cela quelque attention, on en pourra néanmoins venir à bout ſans autre ſecours que celui des principes que nous avons déja établis. Cependant, puiſque vous le ſouhaités, je veux bien vous en montrer la maniére dans la progreſſion quintuple qui ſera plus aiſée à manier, que ſi on en prenoit d'autres dont l'expoſant ſurpaſſat la valeur de cinq; & cela vous ſera auſſi utile que ſi nous en choiſiſſions une plus compoſée. Mais il faut d'abord exprimer juſques à cent, ſi vous voulés, la progreſſion décuple & quintuple dans leur ordre naturel.

1 = 1. 2 = 2. 3 = 3. 4 = 4. 5 = 10.
6 = 11. 7 = 12. 8 = 13. 9 = 14. 10 = 20.
11 = 21. 12 = 22. 13 = 23. 14 = 24.
15 = 30. 16 = 31. 17 = 32. 18 = 33.
19 = 34. 20 = 40. 21 = 41. 22 = 42.
23 = 43 24 = 44 25 = 100 26 = 101.
27 = 102. 28 = 103 29 = 104. 30 = 110
31 = 111. 32 = 112. 33 = 113. 34 = 114
35 = 120 36 = 121 37 = 122. 38 = 123
39 = 124. 40 = 130. 41 = 131. 42 = 132
43 = 133. 44 = 134 45 = 140. 46 = 141
47 = 142. 48 = 143. 49 = 144 50 = 200

51=201. 52=202. 53=203. 54=204
55=210. 56=211. 57=212. 58=213
59=214. 60=220. 61=221. 62=222
63=223. 64=224. 65=230. 66=231
67=232. 68=233. 69=234. 70=240
71=241. 72=242. 73=243. 74=244
75=300. 76=301. 77=302. 78=303
79=304. 80=310. 81=311. 82=312
83=313. 84=314. 85=320. 86=321
87=322. 88=323. 89=324. 90=330
91=331. 92=332. 93=333. 94=334
95=340. 96=341. 97=342. 98=343
99=344. 100=400. 125=1000 &c.

Vous sentés bien qu'il seroit très ennuieux dans ces opérations de se servir toujours d'une table faite exprès pour faire ses calculs dans une progression étrangére, il faudra donc se servir de la méthode que je vais vous indiquer.

Je veux voir, par exemple, de quelle maniére le nombre exprimé par les chifres 90 dans notre progression, devra l'être dans la progression quintuple: je divise 90 par 5, le quotient est 18, ce qui m'apprend que j'ai 18 quintes; mais comme on n'emploie pas le chifre 8 dans cette progression, je continue à diviser 18 par 5 pour avoir des quintes de quintes, c'est-à-dire des unités du troisiéme terme, le quo-

quotient eſt 3 & il reſte 3 quintes, j'ai par conſéquent 330 = 90, comme on le peut voir dans la table ci-deſſus. En général, dans une progreſſion moindre que la nôtre, ſi l'on veut voir comment doit s'exprimer un nombre propoſé, il faut 1° l'exprimer ſuivant la progreſſion decuple, 2° diviſer ce nombre par l'expoſant de la progreſſion donnée exprimé auſſi de la même façon; 3° ſi ce quotient eſt plus grand que l'expoſant, c'eſt-à-dire s'il vaut plus que ſon diviſeur, le diviſer par ce même diviſeur, juſques à ce que l'on ſoit arrivé à un quotient plus petit ou égal au diviſeur, expoſant de la progreſſion, 4° on obſervera combien de fois il aura falu diviſer, & on mettra autant de chifres plus un, qu'il a falu diviſer de fois le nombre propoſé dans la progreſſion decuple, 5° enfin, quand aux reſtes que l'on aura trouvés dans les ſubdiviſions précédentes, étants moindres que le diviſeur, ils appartiendront au chifre précédent, en commençant par la droite.

Je veux, par exemple, exprimer 1742 par le moien de la progreſſion nonuple; je diviſe 1742 par 9, le quotient 193 indique 193 neuvaines & 5 unités

de reſte, 193 contient 9, 21 fois, & il reſte 4, 21 contient 9 deux fois avec 3 de reſte.

Le nombre 1742, c'eſt donc 193 neuvaines & 5 unités, je poſe d'abord (5) à la droite, 193 neuvaines ſont 21 neuvaines de neuvaines, & il reſte 4 neuvaines (45) les 21 neuvaines de neuvaines ſont 2 neuvaines troiſiémes, & il reſte 3 neuvaines ſecondes (345) & enfin pour les deux unités du troiſiéme terme, on a dans la ſomme totale 2345 = 1742 : par contre ſi l'on me donne un nombre 2345 dans la progreſſion nonuple, pour connoitre le rang qu'il doit tenir dans la notre, il faudroit diviſer 2345 par 11 = 10 le quotient eſt 213 avec 2 de reſte (2) 213 dixaines valent 18 dixaines ſecondes & 4 dixaines (42) 18 dixaines ſecondes valent 1 dixaine troiſiéme & 7 dixaines ſecondes, ce qui fait en tout 1742. Mais vous ne pouvés pas bien comprendre la ſolution de ce problême, parce qu'il faudroit que vous connuſſiés déja la diviſion des progreſſions étrangéres que je vous apprendrai bientôt.

Je viens enſuite à l'addition. On veut ajoûter *treize, vingt-quatre, ſoixante deux,*

*cin-*

*cinquante neuf*, & *dixhuit*, qui ſont dans la progreſſion quintuple (comme on le voit dans la table ci deſſus, & comme l'on peut auſſi s'en aſſurer par la méthode que nous avons indiquée à ce ſujet) 23 + 44 + 222 + 214 + 33. J'ajoûte de cette maniére; quatre & trois ſont une quinte & deux unités, deux & deux ſont quatre, quatre & quatre ſont une quinte & trois, trois & trois ſont une quinte & l'unité, je poſe 1 & je retiens 3 quintes (1). Dans la ſeconde opération je joins les 3 quintes retenues avec 3 quintes, qui ſont une quinte ſeconde & l'unité de quinte; une quinte plus une ſont deux, & deux ſont quatre, & quatre ſont une quinte ſeconde plus trois quintes prémières; trois quintes & deux ſont encore une quinte de quinte; je poſe donc zero au ſecond rang, & je retiens 3 quintes ſecondes (01) ces trois quintes ſecondes, je les ajoûte avec les chifres du troiſiéme rang 2 + 2, ce qui donne en tout une quinte troiſiéme & deux quintes ſecondes, la ſomme totale ſera par conſéquent 1201.

Dans l'addition des nombres 13 + 24 + 62 + 59 + 18 on a 176. Après ce-

là pour faire la preuve de la précédente opération, je diviſe 176 par 5, le quotient eſt 35 plus l'unité (1) je diviſe enſuite 35 par 5, le quotient qui eſt 7 vaut 7 quintes ſecondes, c'eſt-à-dire une quinte troiſiéme, deux quintes ſecondes, & l'unité 1201. ce qu'il falloit prouver. On peut auſſi remarquer dans la table que 100 = 400, & 76 = 301; donc 176, ſomme des nombres propoſés & exprimés ſuivant la progreſſion decuple, ſe trouvera dans la quintuple, en prenant l'unité pour prémier chifre, un zero pour le ſecond, & 7 qui valent 12, pour les deux derniers, ce qui donnera 1201.

Je puis encore faire la preuve de 4, qui ſera la même que dans la progreſſion decuple, j'ôte les quatrains de la ſomme des chifres, le reſte eſt 0 dans celle des parties, de même que dans la ſomme totale. Car 1000 c'eſt cinq fois une quinte ſeconde, c'eſt-à-dire que ce nombre eſt égal à quatre fois une quinte ſeconde, & à cette même quinte priſe encore une fois, 100 c'eſt cinq quintes, c'eſt quatre quintes, multiple de 4, & une quinte qui vaut quatre & un; 4 + 1 = 10, il reſte donc 1

de

de 100 == 25 après en avoir ôté le plus grand multiple de 4 qui eſt 24. Il eſt clair enfin que cette preuve de 4 dans la progreſſion quintuple eſt ſujette aux mêmes inconvénients & doit avoir préciſément les mêmes avantages que la preuve de 9 dans notre progreſſion.

*Souſtraction* exemple. Les nombres propoſés, ſont *cent ſoixante-huit, & cinquante deux*; je regarde dans la table de la progreſſion; mais comme elle ne va que juſques à cent, je prens 100 == 400 & 68 = 233, ce qui fait 1133. *Autrement.* 168 diviſé par 5 donne 33, & il reſte 3; je diviſe 33 quintes par 5, cela fait 6 quintes ſecondes & trois prémières; je diviſe enfin 6 par 5, & j'ai une quinte troiſiéme & une ſeconde: en tout 1133. Le nombre que je veux ſouſtraire étant *cinquante-deux*, il n'y a qu'à faire comme dans le prémier 52:5 = 10, le reſte eſt 2 (2): je diviſe 10 quintes par 5, le quotient donne deux ſecondes, c'eſt-à-dire (202), ce qui s'accorde encore avec la table de la progreſſion. On a par conſéquent 1133 & 202; maintenant pour opérer, j'ôte d'abord 2 de 3, le reſte eſt (1), je retranche 0 de 3 le reſte eſt encore 3 (33) je veux ôter en-

fin 2 de 1, & comme cela ne ſe peut, j'emprunte une quinte qui vaut cinq & un que j'exprime ainſi, 11: & de 11 ôtant 2, il reſte 4, la diférence eſt donc 431. Effectivement, celle de 168 à 52 eſt 116 = 431.

*Multiplication.* Les deux nombres à multiplier étants quinze & treize, 15 × 13; c'eſt-à-dire ici, 30 & 23, j'opére de cette maniére. Trois fois 0 c'eſt 0: trois fois trois ſont neuf qui valent 14 on a donc (140) pour prémiére multiplication. Je prens enſuite le produit de deux quintes par 0 qui eſt lui même 0, & deux quintes par trois quintes, ce qui fait ſix quintes ſecondes, ou une quinte troiſiéme & une ſeconde; mais on avoit déja neuf quintes, c'eſt donc une quinte troiſiéme, deux ſecondes, & quatre prémiere 1240 = 195 produit de 13 par 15.

Si l'on me donne ces deux nombres 312 & 234 pour en connoitre le produit, j'opére de cette façon.

312
234
2303
1441
1124
140113

Je fais la preuve par 4, & elle ſe trouve bonne, comme vous le pouvés voir aiſément. Et je peux encore la faire par le moien de la progreſſion decuple. Pour cela, je vois que les

les deux facteurs sont 82 & 69, & leur produit 5658. Je le divise par 5, le quotient vaut 1131 & le reste (3). 1131: 5, valent 226, avec l'unité pour reste (13) 226: 5 = 45 & un de reste (113) 45: 5 = 9, le reste est 0 (0113) 9: 5 = 1 4 de reste (140, 113), & c'est justement le produit trouvé; donc l'opération étoit bonne.

*Division.* Exemple, il faut diviser 343 = 98 par 21 = 16. Dans la progression decuple, le quotient s'exprime par 6 & 2 unités de reste : mais dans la progression quintuple, il doit s'exprimer par les chifres 11 & 2 de reste.

Je cherche combien de fois 34 contient 31 c'est 1 fois que je mets au quotient, & il reste 3, ce qui fait 33 : 31 le quotient est encore l'unité avec le reste 2, ce qui donne en tout $11 + \frac{2}{3}$, comme on vient de le dire.

## PROBLEME.

*Un nombre étant donné dans la progression quintuple, l'exprimer dans la notre.*

Pour cela, il n'est besoin que de connoitre la valeur du nombre proposé : car par le moien d'un autre Problême nous

avons déja indiqué la maniére d'exprimer en chifres un nombre donné. Soit donc, par exemple, 343, je le diviſe par 20, le quotient ſe trouve ainſi, 20 eſt contenu une fois dans 34, & il reſte 14; pour ſeconde & derniére opération, je diviſe 143 par 20, le quotient eſt 4, or $2 \times 4 = 13$; il reſte donc 13 avec 14 pour quotient total: $13 = 8$, & $14 = 9$, ce nombre s'exprimera donc par 98; car il y aura neuf dixaines & huit unités.

Je viens maintenant à l'explication du Problême que je vous ai dit ſuppoſer la connoiſſance de cette eſpèce de diviſion. Soit donc 2345 dans la progreſſion nonuple à exprimer dans la progreſſion decuple. Je diviſe 2345 par $11 = 10$, le prémier quotient c'eſt 213 & 2 unités reſtantes (2) $213 : 11 = 18\frac{4}{11}$ car 213 ($\frac{18}{11}$ on operera de cette maniére, 11 & l'on aura déja deux chifres 103 dans le quotient (42) je diviſe a- 88 près cela 18 par 11 ce qui donne 04 l'unité & 7 de reſte, en tout 1742 pour notre progreſſion decuple. L'opération vous ſera très aiſée à faire pour tous les cas ſemblables ſi vous avés bien compris la nature de la diviſion & des

diférentes progreſſions numeriques que l'on peut prendre arbitrairement. J'ai tâché de vous faire ſentir ce qu'il peut y avoir d'eſſentiel & d'utile dans les divers expoſants que l'on peut leur donner, de vous indiquer une méthode aiſée & facile pour faire les quatre opérations Arithmétiques ſur toutes ſortes de progreſſions avec des expoſants quelconques, de changer les chifres de l'une en ceux de l'autre lorſqu'on ſe ſert des mêmes, de connoitre enfin les principaux rapports que toutes ces choſes ont entr'elles; du moins vous avés les principes qui pourront vous ſervir d'entrée dans ce vaſte ſujet. Cela étant, je dois revenir à notre calcul uſité, & me rapprocher de l'Arithmétique connue, & c'eſt auſſi ce que nous allons faire dans l'ordinaire prochain.

---

## *ENTRETIEN XXII.*

### MATHESIUS.

VOus vous rappellés ſans doute, ou plûtôt vous concevés aiſément, que les additions & ſouſtractions des nombres, peu-

peuvent, comme nous l'avons déja remarqué, ſe faire ſur des unités de divers genres, pourvû qu'après cela on les reduiſe à quelque eſpèce d'homogéneïté. Or c'eſt ce qui n'eſt pas difficile à comprendre, mais qui ne laiſſe pourtant pas d'embarraſſer dans certains cas, ſurtout quand les valeurs de ces unités ſont des nombres en raiſon numerique, comme nous le verrons bien-tôt.

L'addition ordinaire des nombres dont les unités ſont toutes en raiſon d'égalité géométrique, eſt très facile; c'eſt celle que nous avons déja expliquée; mais on en voit dont les unités ſont en raiſon multiple & ſousmultiple les unes des autres: telle eſt l'addition des livres, ſols & deniers, où la livre vaut 20 ſols, le ſol 12 deniers &c; il y en a enfin où l'unité d'un nombre vaut 4 pendant que l'autre vaudra 5, la ſuivante 6, & les autres enfin des nombres qui ne ſont ni multiples, ni ſousmultiples, ni égaux à ces prémières unités. Et comme cette derniére eſpèce d'addition eſt ſans contredit la plus difficile de toutes, il ſufira de parler de celle-ci, parce qu'il ſera aiſé dans les autres de voïr de quelle maniére il faudra s'y prendre.

On

On me donne à ajoûter ces nombres ci 128 $a$, 42 $b$, 32 $c$, 14 $d$, & de reduire tous ces nombres en un seul dont $a$ soit l'unité. Il faut d'abord que je connoisse la raison de la grandeur $a$ avec celles ci, $b$, $c$, $d$; c'est ce que je pourrai découvrir, si l'on me détermine la raison de $a$ avec $b$, celle de $b$ à $c$, & celle de $c$ à $d$: or supposons que $3a = 4b$, que $10b = 15c$, & que $19c = 23d$. On commencera par reduire à une même unité, ces diverses espèces de grandeurs. Ayant donc d'abord $3a = 4b$, & $10b = 15c$, je multiplie $3a$ par $10b$, & $15c$ aussi par $10b$, les produits $30ab$ & $60bc$ sont entr'eux comme $30a$ est à $60c$, qui étant reduits aux plus simples termes donnent $a = 2c$: l'égalité de $a$ avec $c$ est donc trouvée, & l'on a déja celle de $a$ à $b$, $a = \frac{4b}{3}$. La derniére égalité se connoitra ainsi; $a = 2c$, $19c = 23d$, donc $19ac$: $46cd = 19a$: $46d$: mais puisque $19c = 23d$, $19a$ sera aussi égal à $46d$ & $a = \frac{46d}{19}$. Cela étant, il faudra ajoûter les grandeurs de

cette

cette maniére, $a = \frac{46d}{19}$, 14 $d$ étants diviſés en 19 parties en contiennent 266, ſi je diviſe, par conſéquent, ce nombre par 46, je verrai combien il me viendra d'unités de $a$, le quotient eſt 5, & il reſte $\frac{33}{46}$, il s'en manque donc $\frac{13}{46}$ que l'on n'ait la valeur de 6 $a$ entiers; j'ajoûte enſuite 32 $c$ ce qui fait 16 $a$ (21 $a$) j'ajoûte enfin 42 $b$, & comme l'équation eſt celle-ci $a = \frac{4b}{3}$, je reduis 42 $b$ en tiers ce qui fait $\frac{126}{3}$ & je diviſe $\frac{126}{3}$ par $\frac{4}{3}$, le quotient eſt 31 & $\frac{1}{2}$ (52 $a$) en tout 128 $a + 5a + 31a + 16 = 180a$: les fractions $\frac{33a}{46}$ & $\frac{a}{2}$ étants reduites à une même fraction montent à $\frac{112a}{92}$ c'eſt-à-dire $a + \frac{20a}{92} = \frac{10a}{46}$, ce qui fait un peu moins de 181 $a$ & $\frac{a}{4}$.

Il eſt aiſé de voir ce qu'il faudroit fai-

re

re à l'égard des raiſons multiples & ſous-multiples, ainſi je ne m'y arrêterai pas. Quand à la ſouſtraction, il eſt clair qu'elle eſt fondée ſur le même principe, ſi je n'ai qu'à retrancher les grandeurs homogénes les unes des autres : que s'il arrive que l'un des nombres ſupérieurs ne puiſſe pas être ôté de ſon homogéne inférieur, j'emprunte dans un autre aſſemblage d'unités hétérogénes que je reduis à l'homogénéité, une ſomme qui jointe avec ce qu'il y avoit déja, ou avec un zero, s'il n'y avoit rien, faſſe une quantité égale ou plus grande que le nombre inférieur auquel je l'ai rendue homogéne.

Enfin le reſte pourra être reduit en quelque eſpèce que l'on voudra par la règle que nous venons d'indiquer.

La multiplication ſe fait ainſi. Je veux multiplier $10\,a + 3\,b + 2\,c$, par $2\,a + 5\,c$ : on aura ſuivant les règles ordinaires, $20\,aa + 6\,ab + 10\,ac + 50\,ac + 15\,bc + 10\,cc$. Nous ſuppoſons comme la prémière fois, $3\,a = 4\,b$ & $10\,b = 15\,c$, on reduira après cela tous ces produits partiaux en un ſeul, en ſuivant les règles de l'addition, & la ſomme ſera le produit

duit total. L'uſage & l'expérience auſſi bien qu'un certain goût particulier peuvent déterminer chaque perſonne à choiſir la méthode qui lui conviendra le mieux; cela eſt aſſez indiférent pourvû que l'on comprenne toujours exactement la raiſon de ce que l'on fait, & que l'on n'agiſſe jamais au hazard, pour ainſi dire, ſans comprendre pourquoi l'on opére d'une façon plûtôt que d'une autre.

La diviſion des grandeurs hétérogénes ſe fait, & ne peut preſque ſe faire qu'en reduiſant d'abord le dividende & le diviſeur à une même unité : après cela, ſi ce ſont deux fractions il n'y a qu'à les diviſer l'une par l'autre, & le quotient pourra être reduit en unités d'autres nombres hétérogénes entr'eux, ſuivant qu'on le trouvera à propos.

On ſe ſert particuliérement dans la multiplication & diviſion des nombres de diférents genres, d'une méthode qui conſiſte à prendre les parties aliquotes d'un facteur ou d'un quotient ſans opérer tout au long, ce qui abrége beaucoup, & a ſans contredit de très grands avantages. Mais je crois pouvoir me diſpenſer d'en parler ici, puiſque c'eſt

c'eſt, pour ainſi dire, une marque certaine que l'on comprend bien ce que l'on fait, quand on invente ſoi-même quelque voye abrégée pour s'épargner une route longue & pénible; or c'eſt ce que vous ſerés en état de faire par vous-même ſans autre ſecours que celui de la reflexion, & du bon ſens.

Vous n'avés pour cela qu'à mettre en œuvre, & à chercher par votre propre induſtrie, le fondement de cette règle dans les principes dont je vous ai donné l'explication : je dois pourtant vous dire quelque choſe ſur les fractions décimales, pour vous montrer l'uſage que l'on en peut faire.

Suppoſons une progreſſion géométrique dont le prémier terme ſoit l'unité; le ſecond une dixiéme : le troiſiéme, une centiéme; le quatriéme, une milliéme, $\frac{..}{..}$ 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$. $\frac{1}{10000}$. &c. dont le nombre des termes ſoit indéterminé, & l'expoſant $\frac{1}{10}$ : on appellera cette progreſſion *ſous-decuple* à cauſe de la raiſon qui y règne ; & les termes *fractions décimales*, parce qu'ils expriment

ment une diviſion de l'entier qui ſe fait toujours de dix en dix: on les appelle auſſi particuliérement *entiers*, *primes*, *ſecondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, *ſextes* & ainſi de ſuite; on les exprime de cette maniére $1^{\circ}$, $1'$, $1''$, $1'''$, $1^{iv}$, $1^{v}$ &c. Or comme cette progreſſion va toujours en diminuant, & que la numerique augmente continuellement de dix en dix, rien n'eſt plus facile que de faire toutes les reductions que l'on voudra ſur de telles fractions, reduire les entiers en primes, les primes en entiers, les quintes en quartes ou en ſextes &c.

Par exemple, ayant $159''$, c'eſt-à-dire 159 centiémes, on aura 15 dixaines de ſecondes, ou 15 primes, & ces 15 primes valent un entier & cinq primes; de ſorte que $159''$ ſont, un entier, 5 primes, & 9 ſecondes, $1^{\circ} + 5' + 9''$. On change des primes en ſecondes par l'addition d'un zero, 19 primes valent 190 ſecondes, 1900 tierces, 19000 quartes. Si l'on diviſe des ſecondes par des primes, on a des primes: $192'' : 2'$ donnent $96'$: car 192 centiémes contiennent 2 dixiémes, 96 dixiémes de fois.

Il eſt d'abord ſurprenant de voir que des

des tierces qui ſont plus petites que des ſecondes, diviſées par des ſecondes, donnent des primes dont la valeur eſt plus grande que celle des tierces.

Par exemple $38'''$ diviſées par $19''$ donnent $2'$; c'eſt-à-dire $\frac{38}{1000} : \frac{19}{100} = \frac{2}{10}$

38 milliémes ne contiennent pas $\frac{19}{100}$ des unités de fois, mais des dixiémes de fois; le quotient eſt ici plus grand que le dividende & le diviſeur, parce qu'il marque le rapport qui ſe trouve entre ces deux grandeurs, & leur rapport eſt plus près de l'unité entiére, que ceux des deux grandeurs emploiées pour la diviſion, à l'égard de leurs unités auſſi entiéres. C'eſt ainſi qu'une milliéme contient la dixiéme d'une centiéme, & elle eſt plus proche de la contenir ſi on la regarde comme unité, qu'une milliéme & une centiéme ne ſont proches de contenir l'unité dont ils ſont, l'un, le troiſiéme terme, & l'autre, le ſecond.

La règle générale que nous donnerons pour la diviſion ſera celle-ci: c'eſt de diviſer l'un par l'autre les deux nombres donnés, ſuivant la méthode que l'on prati-

pratique dans les nombres entiers, & ſouſtraiſant enſuite l'expoſant du diviſeur, de l'expoſant du dividende, le reſte ſera celui du quotient. Par exemple, $30^{\circ}$: $7'''$ donnent $4\text{—}'''$ & $\frac{2\text{—}'''}{7}$. Quand on a le ſigne négatif, cela veut dire que le dividende contient le diviſeur des unités entiéres de fois; & quand il eſt poſitif, ce ſont des dixiémes, des centiémes &c. $100''$ contiennent $10'$, $10'$ fois; c'eſt-à-dire une milliéme contient une centiéme une dixiéme de fois: par contre, une centaine contient une dix milliéme cent fois; parce que cette centiéme a été d'abord diviſée en dix parties, & enſuite chacune de ſes parties en dix autres: c'eſt pourquoi une dix-milliéme doit être priſe dix foix pour égaler une milliéme, & une milliéme le doit être autant de fois pour valoir une centiéme. Auſſi, ſuivant notre règle, $1'' : 1^{4} = 1\text{—}''$, & $1^{4} \times 1\text{—}'' = 1''$: car il eſt clair que pour multiplier, on ajoûte les expoſans des facteurs & on les met au bout du produit numerique. Suppoſons que l'on veuille multiplier $3^{\circ} + 4' + 3''$, par $2^{\circ} + 1' + 2''$, c'eſt comme ſi je multi-

pliois

pliois $343''$ par $212''$, le produit ſera $72716^4$ qui valent $7^\circ + 2' + 7'' + 1''' 6^4$. L'addition & la ſouſtraction ne ſont pas non plus difficiles dans les fractions décimales, comme vous pouvés déja vous en être apperçu, $3^\circ + 4' + 3'' + 42'''$ font $34342'''$, $42'''$ valent $4''$ & $3'''$ &c.

Dans la ſouſtraction, on emprunte quand il le faut, une prime pour une ſeconde, un entier pour une prime: & quand il y pluſieurs zeros, on les paſſe tous juſques-à-ce que l'on ſoit arrivé à un chifre d'où l'on emprunte l'unité; comme par exemple une prime empruntée pour une quarte, laiſſe dans les rangs interpoſés $9'' + 9'''$ & il reſte $1'''$ qui vaut $10^4$ que je joins avec le zero ou le chifre du nombre des quartes ſupérieur, plus petit que celui qu'on veut retrancher.

Il s'agit maintenant d'examiner de quelle maniére on peut reduire des fractions décimales à d'autres fractions, & réciproquement des fractions quelconques à des fractions décimales. Pour le connoitre, ſuppoſons ſi vous voulés, qu'une toiſe eſt marquée d'un côté par des diviſions de dix en dix, & de l'autre prémiérement en 6 pieds, chaque pied en 12 pouces, cha-

que

que pouce en 12 lignes &c. Si en mesurant, l'on trouve 4 toises, 5 pieds, 8 pouces, combien trouvera-t-on en fractions décimales : je fais une règle de trois en disant, si 72 pouces valent 10 primes, combien de primes vaudront 356 pouces, $49' + \frac{32}{72}$ : pour évaluer cette fraction, je la reduis d'abord à ses plus petits termes $\frac{4'}{9}$, quatre primes valent 40 secondes, 400 tierces, 4000 quartes &c. $\frac{40'}{9}$ c'est 4 secondes & $\frac{4''}{9}$, quatre secondes valants 40 tierces, la fraction sera 4 tierces & $\frac{4'''}{9}$ & cela à l'infini, comme on le voit évidemment.

Par contre, pour évaluer des fractions décimales en toises pouces & pieds, comme $1742'''$ ; je dis, si 1000 tierces valent 6 pieds ou une toise, combien 1742, $\frac{10452 - 10}{1000} + \frac{452}{1000}$ : on aura donc 10 pieds & quelque chose de plus, c'est-à-dire une toise & davantage de 4 pieds.

Si je voulois multiplier 4 aunes & demi, par une livre quatre sols, je reduirois

4

4 aunes & demi en primes ſavoir 45, puis que chaque moitié d'aune vaut 5 primes; une livre quatre ſols valent 12 primes, puiſque 4 ſols ſont $\frac{1}{5}$ de 20 ſols; je multiplie donc 12′ par 45′ le produit eſt 540″ qui vaut 5° + 4′, c'eſt à dire, 5 livres 8 ſols.

La Fraction $\frac{17}{18}$ ſe peut reduire en une fraction décimale; car ſi 18 dix-huitiémes valent 10 primes, combien en vaudront 17; on diviſera 170 par 18 & le quotient vaut 9 primes & 8 dix-huitiémes qui ſont quatre neuviémes; 4 neuviemes ſe reduiront encore par une autre Régle de trois, en diſant, ſi neuf neuviemes de primes valent 10 ſecondes, combien 4 neuviémes, le quotient eſt 4 ſecondes, & il reſte encore 4, $\frac{4''}{9}$ ces reſtes peuvent être évalués à l'infini; mais dans l'uſage l'on néglige des parties ſi petites, & l'on ſe contente de reduire les nombres dont on ſe ſert à une quantité dont la difference à la véritable ſoit de peu de valeur.

Il me tarde de vous parler mainte-

nant de l'extraction des racines, qui a ſans contredit de très grands uſages dans les mathématiques; c'eſt ce que je me propoſe de vous expliquer d'une maniere très ſimple & très aiſée à comprendre. Il ſe pouroit néanmoins que cette méthode vous donnât un peu plus de peine, au commencement, que celle dont on a de coutume de ſe ſervir: Je ne laiſſe pourtant pas d'eſpérer que vous donnerés la préférence à celle dont je vais vous indiquer les principes & l'opération. Je ſuppoſe que vous avés retenu dans vôtre mémoire les definitions de *Puiſſances*, de *quarré*, de *cube*, de *quatrième Puiſſance* &c; en ſorte qu'il ne ſera pas néceſſaire ici d'expliquer de nouveau les termes dont on ſe ſert à ce ſujet.

L'extraction des racines, étant un Problème qui conſiſte à trouver la racine d'une puiſſance dont l'expoſant & la valeur ſont des grandeurs données, il eſt aiſé de voir que les quatre opérations de l'Arithmetique ne peuvent pas ſuffire pour ce calcul; parce qu'une puiſſance quelconque étant compoſée de facteurs egaux, des que l'un eſt connu, & que l'on ſait à quelle puiſſance il faut l'élever, on aura ce que l'on cherchoit, puis

que

que l'on ne peut donner aucun facteur qu'on n'ait auſſi la racine propoſée. La queſtion eſt donc de trouver par une Régle particulière la racine d'une puiſſance dont le degré & l'expoſant ſont connus. Il y a des quantités qui ne peuvent pas avoir un nombre pour racine, & ce ſont celles là que l'on apelle *Puiſſances imparfaites.* Quand on veut extraire la racine de ces nombres, on prend la plus haute puiſſance de celles dont on cherche la racine, & qui ſoit moindre que le nombre propoſé d'un certain reſte que l'on déterminera bien-tôt. Par exemple, ſi je veux extraire la racine de 15, le plus grand quarré qui ſe trouve dans 15 c'eſt 9, & il reſte 6.

La preuve de cette opération doit ſe faire en multipliant la racine trouvée autant de fois qu'il le faut pour avoir la valeur du nombre propoſé.

Il faut auſſi rapeller cette propoſition, c'eſt que le quarré d'un Binome eſt égal aux quarrés des deux termes, & au double produit ou Rectangle fait de l'un multiplié par l'autre. $a+b \times a+b = a^2 + 2ab + bb$. Enfin pour l'extraction des racines quarrées (car c'eſt par cette opération que nous allons commencer)

il eſt important de ſavoir que le produit de deux quarrés exprimés chacun par un nombre entier, eſt toujours un quarré qui a pour ſa racine le produit des deux facteurs. C'eſt ce qui ſe voit aiſément par lettres; car ſoient *a a* & *b b* ces deux quarrés, le produit *a a b b* eſt lui-même un quarré dont la racine *a b* eſt le produit des deux racines *a*, *b*; mais pour le concevoir plus diſtinctément, remarquons que le prémier quarré multiplié par la racine du ſecond, ſe trouve autant de fois dans le produit des deux quarrés qu'il y a d'unités dans la ſeconde racine: or le produit du prémier quarré par la ſeconde racine, c'eſt le produit des deux racines par la prémière, & ce produit ſe trouvant pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la ſeconde racine, on aura le produit des deux racines multiplié par la prémière, & on devra multiplier cela par la ſeconde; donc le produit de deux quarrés, ce ſont deux racines priſes autant de fois qu'elles contiennent d'unités, c'eſt à dire que c'en eſt le quarré; ce qu'il faloit démontrer.

NEANDER Je trouve cette démonſtration un peu difficile à comprendre.

MATHESIUS Cela eſt vrai: & de plus,

plus, vous aurés beaucoup de peine à la saisir d'une prémière vûe, à moins que vous ne l'écriviés vous-même, ou peut-être, que vous ne preniés un exemple. Cependant je vais tâcher encore de rendre cette idée plus claire & plus intelligible.

Puis que le produit des deux racines multiplié par la prémière doit être pris autant de fois que l'unité se trouve dans la seconde; il est clair que le nombre de fois que le produit des deux racines sera pris, c'est le nombre qui exprime les unités de la prémière racine, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la seconde, c'est à dire justement le produit des deux racines: car le produit des deux racines étant pris un certain nombre de fois, la somme de toutes ces prises se trouve multipliée par un autre nombre qui a servi de facteur dans la prémière multiplication, savoir la seconde racine. La valeur du produit de deux quarrés sera donc le produit des deux racines multiplié par la prémière, & ce nouveau produit le sera par la seconde, ce qui est précisement, comme il le faloit, le quarré du produit des deux racines. Enfin pour achever de rendre cette démonst-

tration plus ſenſible, je me ſervirai de caractères algebriques & de chifres. $aa = 4$ & $bb = 9$, les racines ſont 2 & 3, leur produit 6 doit être la racine du quarrés 36. Quand je multiplie 4 par 9, je prens $4 \times 3$ trois fois, mais le produit de 4 par 3 c'eſt $2 \times 3$ pris 2 fois, & le produit des racines $2 \times 3$ pris 2 fois doit être multiplié par 3, c'eſt à dire que le nombre des priſes du produit des deux racines c'eſt $2 \times 3$, ce qui eſt le produit même de ces deux racines.

Le quarré d'un chifre s'exprime toûjours par un ou deux chifres, parce qu'un nombre pour avoir trois chifres doit être égal au troiſième terme, ou à un nombre de ce troiſième terme, puiſque le troiſième eſt le quarré du ſecond & qu'un nombre exprimé par un ſeul chifre eſt toujours moindre que le ſecond terme: Il eſt donc clair que le quarré d'un nombre exprimé par un chifre ne le ſera jamais par trois. Dès là il s'enſuit manifeſtement que 900, par exemple, multiplié par 900 donnera 810000, c'eſt à dire 81 fois le quarré de cent qui eſt 10 mille, comme dans $9 \times 9$ on a 81 fois le quarré de 1 qui eſt auſſi l'unité: Mais on n'aura jamais cent fois le quarrés du terme de la racine

racine, lorſque cette racine ſera préciſément un multiple moindre que dix d'un terme de la progreſſion. Il en eſt de même de tous les autres nombres, 50000 × 50000 donne 25 fois le quarré de 10 mille, car 50 mille c'eſt 10 mille multiplié par 5, & ſon quarré c'eſt d'abord celui de 10000; mais comme il faut prendre le quarré de cinq fois dix mille, on aura 5 fois le quarré de 10000 pris 5 fois.

Quand on veut trouver le quarré d'un nombre qui s'exprime par un chifre, & par pluſieurs zéros, il faut prendre le quarré du chifre & doubler le nombre des zéros, ainſi le quarré de 10 c'eſt 100; celui de 20, 400; celui de 500, 250000 &c. La raiſon de cela eſt que prémièrement, ſi le chifre eſt l'unité, comme dans le nombre 100, ce nombre eſt regardé comme l'unité qui doit être priſe 100 fois; or comme je mets 2 zéros avant l'unité, j'en mets de même 2 avant le quarré 100, ainſi je double le nombre des zéros.

Quand le chifre eſt plus grand comme 7000, je vois que comme 7000 doivent être pris 7000 fois, il faut que je prenne 7 mille, mille fois, & ce nom-

bre encore 7 fois ; or 7000 × 1000 pris 7 fois, c'eſt 49 fois le quarré de 1000: ainſi je prens toujours le quarré du chifre que je regarde comme l'unité, & je double le nombre des zéros comme auparavant.

On peut tirer de là un moyen très facile de connoitre, ſi un nombre comme 1000000 eſt quarré ou non ; aſſavoir quand le nombre des zéros eſt pair, & que le chifre qui eſt le plus à la gauche eſt un quarré : D'où il s'en ſuit que 60000 par exemple, étant donné, je change d'abord le 6 en 1, & je vois ſi le nombre des chifres eſt pair, ce qui n'étant pas, je ſuis aſſûré que 10000 eſt un quarré dont la racine eſt l'unité avec la moitié des zéros. On peut donc dire en général qu'un nombre étant exprimé dans la progreſſion numerique par un chifre quarré & par des zéros, ſi le nombre des caractères eſt pair, le nombre ne ſera pas quarré, & s'il eſt impair il ſera toujours quarré ; dont la raiſon eſt, que puis que l'on double le nombre des zéros pour les ajoûter à ceux que l'on a déja avec l'unité, on a un nombre de chifres pair avec l'unité, ce qui le rend impair. On peut auſſi compter.

ter d'abord le nombre des zéros, s'il eſt pair c'eſt un quarré dès qu'on le joindra avec l'unité ou un nombre quarré, ſinon il ne ſera jamais quarré. Et ces deux méthodes, comme il eſt évident, reviennent entierement au même.

Après avoir établi ces propoſitions fondamentales, je vais entrer dans l'explication particuliere de la méthode d'extraire les racines des ſecondes puiſſances ou des quarrés, & je la donnerai uniquement par des exemples, croyant pouvoir le faire dans cette occaſion d'une maniere auſſi générale que ſi je l'avois démontrée par lettres, & ſans me ſervir de chifres.

On a un nombre 30000, la ſomme des zéros eſt paire, donc 10000 eſt un quarré dont la racine eſt 100 compoſée de l'unité & de la moitié du nombre des zéros. Le plus grand quarré qui ſoit dans 3 c'eſt 1, je mets donc 100 pour racine partiale, & il reſte 20000 après en avoir ôté le quarré 10000 : Mais quoique 20000 contienne deux fois le quarré de 100, ma racine totale n'eſt pas 300 ni même 200, parce qu'alors j'aurois un Binome 100 + 100 & qu'outre le double quarré de 100, il faudroit enco-

re 2 fois le Rectangle de 100 par 100; de sorte qu'on auroit 40000 pour quarré de la racine. $100 + 100 = 200$. Ma racine est pourtant plus grande que 100, ainsi je puis la considerer comme un Binome dont le terme 100 est connu; & l'autre moindre que 100 que je ne connois pas encore; mon quarré doit donc être égal à celui de 100, au double Rectangle de 100 par le terme inconnu, & au quarré de cet inconnu, par une des propositions précédentes : il n'y a donc plus qu'à savoir où doivent se terminer ce double Rectangle & le quarré de l'inconnue. Pour le sentir, remarqués que dans la multiplication d'un nombre par lui-même, le quarré du prémier chifre à la droite ne peut de moins que d'occuper dans le quarré total exprimé par chifres la prémière ou les deux prémières places; il faut donc necessairement que le quarré de la partie inconnue qui est plus petite que 100 se termine au second chifre de 20000 & chercher par là même le double Rectangle dans 200 qui valent ici 20000 à cause qu'il y a deux zéros après eux; je double 100, & je divise 20000 par 200, le quotient est 100; mais si la partie inconnue étoit

100,

100., il ne resteroit rien dans 20000, & après le double Rectangle on n'auroit pas le quarré de la seconde partie. Je suppose donc que la partie inconnue soit $x$; celle que j'ai, puis qu'elle vaut 100, me donnera si on lui ajoûte $x$, $100+x \times 100+x = 10000+200x+xx$ qui doit être un quarré moindre que 30000, j'en ôte d'abord 10000, & il reste $200x+xx$ qui doivent être moindres ou égaux à 20000. La valeur de $x$ est indeterminée, mais il faut que $x$ soit tel que multiplié par 100, & ajoûté de cette maniére à son quarré il ne soit pas plus grand que 20000 : il faut donc voir à peu près combien d'unités peut contenir $x$; & supposant que l'on ait $60 = x$, on auroit $60 \times 200 = 12000$ & le quarré de 60 c'est 3600; en tout 15600, qui ôtés de 20000 donnent pour reste 4400; ainsi le nombre se trouve déjà reduit de cette manière $30000 - 25600 = 4400$, & la racine trouvée est 160 c'est à dire un Binome dont les termes trouvés successivement ont étés 100 & 60 : par la même raison, 4400 contient $320x$ & $xx$; je prens $x = 10$, il se trouve que $3200+100 = 300$ otés de 4400 donnent pour reste 1100, & la racine devient

$100 + 60 + 10 = 170$. 1100 contient $340\,x + x\,x$, je prens $x = 3$, ce qui donne 1029, & ôtant ce nombre de 1100, il reste 71. Enfin pour m'assûrer si le reste 71, ou un plus grand nombre dans d'autres cas, peut contenir encore l'unité dans la racine, je n'ai qu'à voir si ce reste est plus grand, égal, ou plus petit que le double de la racine trouvée, plus l'unité: dans les deux prémiers cas le reste est trop grand, & l'on peut ajoûter à la racine pour le moins l'unité; comme on le verra aisément, si l'on fait $a + 1 \times a + 1 = a^2 + 2\,a + 1$. Si donc le reste est plus grand que deux fois la racine $a$ plus l'unité, on n'a pas trouvé encore le plus grand quarré de la puissance imparfaite que l'on se proposoit d'extraire; & allors il faut continuer jusques à ce qu'il n'y ait plus de reste, ou qu'il soit plus petit. Dans cette opération, par exemple, le reste 71 s'est trouvé moindre que $173 \times 2, + 1$.

Je prens encore un autre nombre pour en extraire la racine quarrée; ce nombre est 234620; je prens d'abord toutes les unités du plus grand terme qui soit un quarré parfait dans la progression numérique, & comme il y a 23 dixaines de mille,

mille, il y a, par là même 23 quarrés dont chaque racine eſt 100, enſuite je cherche quel eſt le plus grand quarré qui ſoit contenu dans 23, je trouve que c'eſt 16 dont je prens la racine quarrée 4; & comme 16 multiplié par une dixaine de mille, c'eſt le produit de deux quarrés 16 & 10000, je prens pour racine $4 \times 100 = 400$, prémière partie de celle que je cherche, j'ôte le quarré de 400 qui eſt 160000, de 234620, il reſte 74620 qui contiennent $800\,x + x\,x$; je fais $x = 80$; $800\,x = 64000$ & $x\,x = 6400$, en tout 70400, ôtés de 74620 ils donnent pour reſte 4220: par conſéquent on a dans le nombre propoſé un quarré dont la racine eſt 480, mais comme il reſte 4220, le reſte de la racine cherchée doit être multipliée encore par le double de la partie trouvée 480, & jointe au quarré inconnu pour avoir celui qui approche le plus du nombre donné, ou qui lui ſoit égal, ſi c'eſt une puiſſance parfaite; je pourrai donc encore ſuppoſer $960\,x + x\,x$ dans 4220, je cherche à peu près combien $x$ peut contenir d'unités, & le faiſant égal à 3, on aura 2880 & le quarré $x\,x = 9$; 2889 ôtés de 4220 donnent pour reſte

1331 qui valent plus que l'unité jointe au double de 483 savoir 967; & comme j'ai 1331 qui contient $966x+xx$, je vois que 9 est seulement égal à l'unité, il faut donc retrancher 967 de 1331, le reste est 364 qui vaut enfin moins que $400+80+3+1=484:2$, plus l'unité. Donc la racine trouvée est 484 & le reste 364.

Dans de telles opérations, on suppose que l'on connoit la valeur des quarrés des prémiers nombres jusques à dix, ce qui n'est pas difficile; & les valeurs que l'on attribue à $x$ étants un peu indéterminées, l'habileté dans cette méthode consiste à voir d'un coup d'œuil la plus grande valeur que l'on pourra assigner à la partie inconnue; c'est par l'exercice que l'on pourra en venir aisément à bout, ce qui épargnera dans la suite beaucoup de peine & de travail dans les longs calculs que l'on aura occasion de faire.

Je ne me suis pas servi de la méthode usitée, parce que je l'ai crue un peu trop difficile pour en donner une intelligence claire & précise. Avant que l'on ait acquis une certaine facilité pour suivre les Régles que je viens de prescrire, on peut apprendre la méthode ordinaire

pour

pour la ſuivre dans la pratique, juſques à ce que l'on ſe trouve en état d'opérer ſans peine ſur cette autre dont nous venons de parler.

NEANDER. Je ſouhaiterois, avant que vous finiſſiés, une petite recapitulation de cette méthode pour en avoir une idée générale.

MATHESIUS. Concevés qu'un nombre étant propoſé pour en extraire la racine quarrée, je puis en ôter un quarré moindre que lui; & il ſe trouvera que le double de la racine de ce quarré multiplié par une autre partie de la racine cherchée & joint au quarré de cette même partie, fera un nombre quarré dont la racine eſt un Binome: mais le double de la racine plus l'unité eſt égal à la différence de deux quarrés dont la différence des racines eſt l'unité; de ſorte que je pourrai aiſément connoitre à l'unité près la racine quarrée du nombre donné, ou celui qui en aproche le plus. Tout cela étant ſuppoſé, ainſi que l'on ne ſauroit en diſconvenir, il eſt clair qu'après avoir retranché d'un nombre donné les quarrés *a a* & *b b* de deux parties *a* & *b* & le double rectangle fait de ces deux parties, on aura ôté le quarré de la ſom-

me

me de ces deux parties: on a donc une voye facile pour connoitre tous les autres termes qui doivent composer le multinome dont la valeur exprime celle de la racine cherchée; c'eſt à dire qu'on doublera toujours la partie de la racine qui eſt déja connue, & que l'on prendra un multiplicateur quelconque; mais tel pourtant que le produit qu'il fera par le moyen du double de la racine donnée, joint au quarré de ſa propre valeur ne ſoit pas plus grand que le reſte du nombre propoſé dont on a déja retranché le quarré de la partie de la racine cherchée. Il n'y a qu'à continuer cette opération préciſément de la même maniere, & l'on aura toujours ce que l'on demandoit. Appliqués maintenant ceci à la nature de la progreſſion numérique, & vous verrés que ſi elle vous eſt aſſés familiere, rien ne vous ſera plus aiſé que de combiner ces principes pour découvrir les Régles générales de cette méthode. Que ſi par quelque hazard vous n'étes pas content de ceci, vous pourés aprendre à peu de fraix la méthode ordinaire, ſur tout ſi vous voulés vous abandonner à la routine; car je ne crois pas la choſe trop facile, de faire une démon-

monſtration tout à fait générale de l'extraction commune des racines. Je renvoye à un autre jour l'extraction des racines cubiques, & celle des autres puiſſances.

## *ENTRETIEN XXIII.*

### MATHESIUS.

L'Extraction des racines cubiques a le même fondement que celle des racines quarrées. Un Binome élevé à la troiſième Puiſſance, contient le cube de châcun des termes, le triple Rectangle du quarré du prémier terme par le ſecond & le triple Rectangle du quarré du ſecond par le prémier. La différence d'un cube à un autre cube qui le ſuit immediatement, eſt toujours le triple quarré de la racine du plus petit, le triple de cette racine & l'unité; comme on le peut voir en multipliant un nombre quelconque deux fois par lui-même, & en élevant à la même puiſſance ce nombre plus l'unité. Si l'on regarde dans la progreſſion numérique, on verra que ces nombres. 1., 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 &c. c'eſt à dire toutes les puiſ-

ſances

ſances de 10 ſont des cubes, dès qu'ils s'expriment par l'unité & un nombre de zéros qui ſoit trois ou un de ſes multiples. On doit auſſi remarquer que le produit de deux cubes eſt toujours un nombre cubique dont la racine eſt le produit de celles des deux cubes, facteurs de la prémière multiplication : c'eſt ce que l'on comprendra, quoi qu'avec aſſés de peine, ſi l'on fait bien attention à la nature de ce produit & que l'on ſuive continuellement l'opération ; car au fond le principe en eſt le même que celui d'où l'on démontre la proprieté d'être toujours un quarré, au produit de deux nombres élevés l'un & l'autre chacun à leur ſeconde puiſſance. Enfin il eſt bon de ſavoir que l'on doit connoitre exactement la valeur de tous les cubes depuis l'unité juſques à dix ; & cela afin de n'être pas embaraſſé par les petites extractions que l'on eſt toujours obligé de faire dans celle des nombres plus compoſés.

Pour extraire la racine cubique d'un nombre propoſé, il faut d'abord faire attention au nombre des chifres par leſquels il eſt exprimé ; & remarquant de plus que les termes 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25 &c. en progreſſion Arithmétique expri-

expriment les cubes qui ont pour leurs racines 10, 100, 1000, &c. Ainſi, par exemple, un nombre étant exprimé par 14 chifres, il contiendroit un cube dont la racine ſeroit pour le moins dix mille; ſi l'on a des zéros & un chifre on prend le tiers des zéros, en commençant par la droite, & ce qui reſte, ſi l'on n'a pas un nombre de chifres diviſible par 3, on en extrait la racine cubique que l'on multiplie par celle du cube que l'on trouve dans ce nombre en prenant l'unité & trois zéros, ou un multiple de trois: ce produit de deux cubes donnera lui-même un nombre cubique, le plus grand terme par lequel ſoit exprimé la valeur de la racine cherchée; on ſouſtraira le cube de cette partie déjà trouvée de la racine dont on cherche la valeur, & le reſte, s'il n'eſt pas moindre que le triple quarré de la racine, le triple de la valeur ſimple & l'unité, il contiendra, dis-je trois fois le quarré de la partie connue multiplié par une inconnue, le triple quarré de cette même inconnue par celle que l'on connoit & enfin le cube de l'inconnue 1 & il faut que ces trois produit pris enſemble ne ſoient pas plus grands que le reſte du nombre propoſé

s'il

s'il n'y a point de reſte ou de difference, l'opération eſt achevée, & la valeur aſſignée à l'inconnue eſt la ſeconde partie de la racine cubique. S'il y a un nouveau reſte, il faut derechef examiner s'il eſt aſſés grand pour que l'on puiſſe ajouter l'unité ou un nombre à ſa racine; ce qui étant, on aura déja retranché du nombre propoſé un cube dont la racine eſt un Binome connu, il doit donc y avoir dans le reſte trois fois le quarré de la racine partiale multiplié par l'unité ou un nombre, trois fois le quarré de cette unité ou de ce nombre multiplié par la quantité connue dans la racine que l'on cherche, & enfin le cube de l'unité ou de ce nombre encore inconnu: je réitere ainſi l'opération juſques à ce qu'il n'y ait plus de reſte ou que le reſte ſoit moindre qu'il ne doit être pour ajouter l'unité ſeulement à la racine cherchée. La démonſtration de cette méthode eſt tout à fait claire tant par l'explication que nous en avons donnée que par la connoiſſance que l'on doit avoir de la progreſſion numerique, & des principes ſur leſquels elle eſt fondée particuliérement. Je me contenterai donc de l'appliquer ici à quelques exemples; remarquant

quant néanmoins que cette opération ne laissera pas de paroître assés dificile pour ceux qui n'y sont pas bien accoûtumés, mais il ne manque pour cela que de l'éxercice, & il sera très utile de tâcher à l'acquérir.

Pour en venir donc à un exemple, je prens le nombre 1742, & comme il y a quatre chifres, sa racine est pour le moins 10, mais elle ne va pas jusques à 20; j'ôte 1000, cube de 10, de 1742, il reste 742 qui contient $300x + 30xx + xxx$, je fais $x = 2$, & en substituant, on a $600 + 120 + 8 = 728$ qui ôtés de 742. donnent pour reste 14 moindre que le triple quarré de la racine 12 qui vaut 432, le triple de la racine 36, & l'unité, en tout $432 + 36 + 1 = 469$. La racine est donc 12 & le reste 14.

Soit le nombre 13002; la racine de 1000 c'est 10, & le cube de 2 c'est 8; je multiplie 2 par 10, le produit est 20 & son cube 8000, il reste 5002, qui doit contenir $1200x + 60xx + xxx$, je vois que $x$ ira à peu près à 3, ce qui donne $3600 + 540 + 27 = 4167$ & il reste 835; la racine étant déja 23, on voit qu'il est impossible que 835 ne soient moin-

moindres que le triple quarré de 23, le triple de la racine & l'unité; par conſéquent la racine eſt ce nombre lui-même 23, & 835 de reſte. Quand on n'eſt pas bien familiariſé avec les nombres, je conſeillerois fort de ſuivre la méthode ordinaire pour des cas où il eſt beſoin de ſe ſervir d'une pratique abrégée : mais j'oſe aſſûrer qu'elle deviendra encore plus aiſée que celle dont nous parlons, ſi l'on veut ſe donner la peine de faire pluſieurs extractions de racine ſuivant la maniére que je viens de vous l'expliquer. L'extraction des quatriémes puiſſances eſt encore à peu près la même choſe, mais la longueur du calcul augmente extremement d'une puiſſance à l'autre ; on en peut juger par ce que l'on a vû des racines cubiques, & quand il faudroit élever un binome au quatriéme degré, joint à quantité d'opérations qu'il faut reïterer dans de grands nombres, peu de perſonnes auront le courage de l'entreprendre ſans néceſſité : Mais on a des voyes plus abrégées & qui facilitent beaucoup ces grandes opérations ; car par exemple ſi l'on avoit à extraire la racine d'un nombre élevée au 60e degré, il faut en prendre la racine quarrée qui ſera la trentiéme, puis

puis en extraire la racine cubique qui donnera la dixiéme, après cela la racine quarrée donnera la cinquiéme puiſſance, & enfin cette puiſſance (avec toutes les autres dont les expoſants ne ſont diviſibles ni par 2 ni par 3) ne peut plus être abregé par l'extraction d'une quarrée ou cubique, il faut donc extraire la racine cinquiéme; on aura de cette maniere la racine 60e que l'on demandoit. On peut extraire auſſi les racines des fractions en opérant ſur les numérateurs & les dénominateurs qui ſont toûjours des nombres entiers: car comme nous l'avons déja fait voir auparavant, le produit de deux fractions, & même de deux raiſons quelconques, c'eſt la raiſon du produit des antécédens à celui des conſéquents; ainſi la racine du numerateur ſe multipliant elle-même produit le quarré de ce numérateur, & ſe trouve égale au produit des numérateurs; de même en eſt-il des conſéquents dans les puiſſances ſecondes, troiſiémes, quatriémes. &c.

Dans les puiſſances imparfaites, comme l'on ne peut pas trouver en nombres entiers la valeur de la racine cherchée, on ſe ſert d'une méthode particuliere que l'on apelle *approximation de ces racines*

racines, où l'on tâche de découvrir une fraction dont la valeur soit à peu près celle que l'on cherche; & c'est ici où les fractions décimales sont d'une très grande utilité, comme nous l'allons voir.

On doit considérer ici dans les termes $1^{\circ}$. $1'$. $1''$. $1'''$. $1^{4}$. $1^{5}$. &c. qu'un entier quarré contient 100 primes quarrées car ayant les deux raisons $\frac{1}{1}$ & $\frac{1}{10}$ leurs quarrés sont 1 & $\frac{1}{100}$, c'est à dire qu'un entier quarré vaut cent primes quarrées, comme il est évident; une prime quarée vaut cent secondes quarrées, & une seconde quarrée contient cent tierces quarrées. En effet les puissances d'un entier quarré sont toûjours un entier à cause que l'unité en se multipliant ne change pas sa valeur, ainsi $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$, & $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ or $\frac{100}{100} = 1$, donc 100 fois $\frac{1}{100}$ c'est à dire 100 primes quarrées valent l'unité ou l'entier quarré: de même $\frac{1}{100}$ c'est à dire une prime quarrée vaut cent

cent ſecondes quarrées, parce que $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$ & $\frac{100}{10000}$ valent $\frac{1}{100}$; donc une prime quarrée vaut cent ſecondes quarrées : de même en ſera-t-il des autres termes à l'infini.

Pour ne point s'embaraſſer inutilement, il eſt à propos de remarquer qu'un entier quarré, un cube &c. c'eſt l'unité ſimple, une prime quarrée c'eſt une tierce ſimple, une ſeconde quarrée eſt une quarte, une tierce quarrée eſt une ſexte &c: il n'eſt beſoin que d'opérer ſuivant la définition ſans ſe mettre en peine du reſte.

Après cela, il ne ſera pas dificile de faire l'aproximation d'une racine dans un nombre qui n'eſt pas, par exemple, un quarré parfait. Prenons d'abord 2 qui eſt le prémier de tous les nombres & une puiſſance imparfaite de quelque degré que ce puiſſe être. Le quarré qui eſt dans 2 c'eſt 1 dont la racine eſt 1, je l'ôte, & il reſte l'unité. Je conſidére ces deux unités comme des entiers quarrés, ce qui ne change point leur valeur, & puiſque 2 unités quar-

rées valent 200 primes quarrées, j'extrais la racine de 200 qui eſt 14 primes, ou un entier & quatre primes avec un reſte, ſavoir 4 primes quarrées, les deux cents primes quarrées valent 20000 ſecondes quarrées, ce qui donne dans la racine 141 ſecondes, ou un entier, quatre primes, une ſeconde, & 119 ſecondes quarrées de reſte; effectivement $\frac{141}{100} \times \frac{141}{100} = \frac{19881}{10000}$ & le reſte 119 ſecondes quarrées, c'eſt $\frac{119}{10000}$; ajoûtés ce reſte au quarré, la ſomme ſera préciſément $\frac{20000}{10000} = 2$.

Si je voulois pouſſer l'aproximation encore plus loin, après avoir reduit 2 en ſecondes quarrées, ce qui fait 20000 dont j'ai déja extrait la racine du quarré $\frac{19881}{10000}$ avec $\frac{119}{10000}$ de reſte, je reduirai 19881 ſecondes quarrées en tierces quarrées qui en valent 1988100, & 119 ſecondes quarrées en 11900 tierces quarrées; ou, ſi je veux, je réduis d'abord 20000 ſecondes quarrées en tierces quarrées, ce qui fait 2000000,

&

Digitized by Google

& j'extrais la racine quarrée de ce nombre, ce qui m'approchera toujours plus de la racine que je cherche, puiſque j'aurai par ce moyen la même valeur entiére, & une plus grande valeur, à cauſe que les ſecondes quarrées réduites en tierces quarrées donnent plus d'unités au nombre qui exprime la racine.

Il eſt aiſé de voir que l'on peut abréger cette opération, en ne faiſant d'abord la reduction d'un certain nombre de primes ou ſecondes &c. quarrées en des ſecondes ou des tierces quarrées, que ſur le reſte de l'extraction précédente, & ajoûtant ſimplement un zero à la racine trouvée, parce que pour reduire à un terme quarré le plus prochain, il a falu multiplier le nombre par 100. C'eſt ainſi qu'après avoir extrait la racine 14 de 200 primes quarrées, valeur de 2 unités, il eſt reſté 4 primes quarrées, que j'ai reduites en 400 ſecondes quarrées, ajoûtant un zero à la racine 14, enſuite je double 140 & je diviſe 400 par ce double, ce qui donne l'unité à la racine 280 $x + x x = 281$, après quoi il reſte 119 &c.

Pour les racines cubiques on s'y prendra de la même maniére, obſervant

toute-fois d'opérer convenablement à la méthode pratiquée dans l'extraction des troiſiémes puiſſances: on voit bien encore que ceci doit s'entendre avec les mêmes reſtrictions des puiſſances de quelque degré qu'elles puiſſent être.

Vous devés auſſi comprendre par tout ce que nous venons de dire, qu'il eſt aiſé de reduire, par exemple, un nombre de tierces quarrées, en ſecondes, en quatriémes quarrées; un nombre de primes cubiques en ſecondes cubiques, de ſecondes en primes &c.

Ainſi 19201 primes quarrées, valent 192 entiers quarrés & 1 prime quarrée, car 19201 c'eſt 192 × 100 & il y a encore l'unité, mais chaque entier vaut cent primes quarrées, donc &c. 173 ſecondes quarrées, valent une prime quarrée & 73 ſecondes quarrées.

La méthode générale ſera donc par rapport à ces reductions de quarrés, de diviſer le nombre quarré de deux en deux en commençant par la droite, & de compter le nombre exprimé dans la prémière claſſe pour des unités quarrées du terme de la fraction décimale dont il s'agit; le nombre de la ſeconde claſſe contient donc des unités quarrées du ter-

me

me qui précéde immédiatement, & ainſi de ſuite juſques aux derniers chifres. 1742 primes cubiques valent auſſi 1 entier cubique, & 742 primes cubiques; car il faut 1000 primes cubiques pour faire un entier, c'eſt pourquoi on diviſera les chifres de trois en trois, en commençant par la droite, & obſervant au reſte la même choſe que pour les quarrés.

Je ne veux pas vous parler ici des incommenſurables, ni d'autres choſes de cette nature, parce qu'à proprement parler, il ne font pas une partie eſſentielle des Elémens d'Algèbre, & que l'on peut fort bien s'en paſſer dans un prémier cours.

Il me reſte pourtant à vous dire quelque choſe ſur les équations qui ſe font par Analyſe: ce ſera d'abord en vous donnant quelques Problèmes des plus communs où tout ſera énoncé en caractères Algébriques: après quoi ſans m'arrêter à en donner l'explication ſuivant ma méthode ordinaire, je finirai par quelques réflexions un peu plus générales.

On doit ſuppoſer ici avant toutes choſes, que deux grandeurs complexes ou incomplexes étants égales, elles conſerveront toujours le même rapport d'égalité,

ſi de part & d'autre on ajoûte, on retranche, on multiplie, on diviſe par les mêmes grandeurs, celles qui ſont prémièrement données. C'eſt ce que l'on peut mettre, comme nous l'avons fait, au rang des Axiomes. L'Art Analytique a pour objet principal la découverte du connu par le moien de ce qui ne l'étoit pas, en ſe ſervant des rapports d'égalité que l'on tire des conditions exprimées dans un Problème donné. Si dans les exemples que je vais rapporter, vous ne comprenez pas bien la raiſon de tout ce que nous allons faire ici, vous n'avés ſeulement qu'à tâcher de le reſoudre vous même avec la plume, & je ſuis perſuadé que vous y découvrirés infailliblement ce qui pouvoit vous cauſer quelque embarras.

## PROBLEME I.

$$1°\ A = u + x + y + z \quad (2)\ x = 3$$

$$u - 8 \quad (3)\ y = \frac{u+3u-8}{2} - 12 = 2$$

$$u - 4 - 12 = 2u - 16 \quad (4)$$

$$z = u + 2u - 16 = 3u - 16$$

$$(5)\ a = u + 3u - 8 + 2u - 16$$

+

$+3u - 16 = 9u - 40$ (6) $a + 40 = 9u$.

## PROBLEME II.

1° $A = x + y + z$ (2) $y = 2x + 10$ (3) $z = x + 2x + 10 + 15$ (4) $a = x + 2x + 10 + x + 2x + 10 + 15 = 6x + 35$ (5) $a - 35 = 6x$ (6) $\frac{a-35}{6} = x$.

## PROBLEME III.

$A = t + u + x + y + z$ (2) $u = 2t + 2$ (3) $x = 3t - 4$ (4) $y = 5t + 8$ (5) $z = 6t - 12$ (6) $a = t + 2t + 2 + 3t - 4 + 5t + 8 + 6t - 12 = 17t - 6$ (7) $a + 6 = 17t$ (8) $\frac{a+6}{17} = t$.

## PROBLEME IV.

$A = x + y + z$ (2) $y = 2x + 50$



Digitized by Google

(3) $z = 2x - 150$ (4) $a = x + 2x + 50 + 2x - 150 = 5x - 100$ (5) $a + 100 = 5x$ (6) $\frac{a+100}{5} = x$.

## PROBLEME V.

X, $y$ (2) $x + 1 = y - 1$ (3) $2x - 2 = y + 1$ (4) $x + 2 = y$ (5) $2x - 2 = x + 3$ (6) $x - 2 = 3$ (7) $x = 5$.

## PROBLEME VI.

X, $y$, $z$ (2) $x + y = z + 20$ (3) $y + z = x + 32$ (4) $x + z = y + 28$ (5) $x = z + 20 - y$ (6) $x = y + 2 - 32$ (7) $x = y + 28 - z$ (8) $2x = 2z - 12$ (9) $2x + 12 = 2z$ (10) $x + 6 = z$ (11) $2x = 2y - 4$ (12) $2x + 4 = 2y$ (13) $x + 2 = y$. (14) $2x + 2 = y + 60 + 20$ (15) $2x = x + 24$ (16) $x = 24$.

PRO-

Digitized by Google

## PROBLEME VII.

V, $x$, $y$, $z$, (2) $u+x+y-620=z$ (3) $u+x+z-460=y$ (4) $u+y+z-380=x$ (5) $u=x+y+z-500$ (6) $u=z-x-y+620$ (7) $u=y-x-z+460$ (8) $x+y=z+380$ (9) $u=x+y+z-500$ (10) $2u=1080-2x$ (11) $2u+2x=1080$ (12) $u+x=540$ (13) $2u=840-2z$ (14) $2u+2z=840$ (15) $u+z=420$ (16) $2u=2x-120$ (17) $2u+120=2x$ (18) $u+60=x$. (19) $u+x=u+u+60=540$ (20) $2u=480$ (21) $u=240$ (22) $u+z=420$ (23) $z=180$ (24) $u+x+z=240+240+60+180=y+460$ (25) $720-460=260=y$ (26) $u=240$ (27) $x=300$ (28) $y=260$ (29) $z=180$.

## PROBLEME VIII.

$A = x + y$ (2) $y = x + b$ (3) $a = 2x + b$ (4) $a - b = 2x$ (5) $\frac{a-b}{2} = x$ (6) $a + b = 2y$.

## PROBLEME IX.

$A = x + bx + c$ (2) $a - c = x + bx$ (3) $\frac{a-c}{b+1} = x$.

## PROBLEME X.

$A = x + y$ (2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = m$ (3) $x + \frac{3y}{4} = 3m$ (4) $a - 3m = \frac{y}{4}$ (5) $4a - 12m = y$.

## PROBLEME XI.

$X, y,$ (2) $x : y = 1 : a$ (3) $x + b : y + c = 1 : m$ (4) $ax = y$ (5) $x + b : ax$

Digitized by Google

$ax + c = 1 : m$ (6) $xm + bm = a$
$x + c$ (7) $xm - ax + bm = c$ (8)
$xm - ax = c - bm$ (9) $\frac{xm - ax}{m - a}$
$= x \frac{c - bm}{m - a} = x.$

## PROBLEME XII.

$X, y$; (2) $x = 3y$ (3) $a - y = b$
$- x$ (4) $a - y = b - 3y$ (5) $a = b$
$- 2y$ (6) $a + 2y = b$ (7) $a - b$
$+ 2y = 0$ (8) $a - b = 2y$ (9)
$b - a = 2y$ (10) $\frac{b - a}{2} = y.$

Quand on veut étudier les Mathématiques dans le deſſein de ſe former au goût d'un raiſonnement exact & d'une parfaite évidence, ce n'eſt pas par l'Analyſe que je conſeillerois de finir ſon cours des Eléments d'Algébre ; car il vaut incomparablement mieux qu'on ne ſe rende qu'à des choſes clairement démontrées, & dont on apperçoive la vérité d'une maniére évidente, que de s'enfoncer pour ainſi dire dans les obſcurités lumineuſes de la méthode analytique où vous n'appercevés la

conclusion de votre raisonnement qu'au travers d'une multitude d'équations sur lesquelles on opére par le moyen de certaines règles, dont l'application est si aisée qu'on peut le faire par routine & par mémoire seulement. Et dans le fond, il n'y a guéres plus d'habileté à savoir ranger ses équations, & ne pas perdre le fil du raisonnement d'un Auteur que l'on a devant les yeux, que de suivre un dessein de broderie ou tel autre ouvrage méchanique.

Vous me dirés peut-être que l'analyse est propre à rendre l'esprit pénétrant, & à lui procurer le talent de l'invention: cela est vrai à quelques égards, mais d'un autre côté je soutiens que cela même est très capable de le borner, parce qu'ordinairement on se repose sur les équations précédentes sans penser à ce que l'on vient de faire, & l'on ne voit presque jamais que ce qui est devant soi; on ajoûte, on retranche, on transpose, on substitue, on extrait des racines, on éléve à certaines puissances, on prend des grandeurs arbitraires, on essaie, on corrige, on avance, on recule, on fait un faux pas, on se trompe dans les signes, on s'obstine à chercher ce que l'on ne trouve point, on s'enfile dans des routes embarrassantes, dans

dans des longueurs, & des obſcurités ennuieuſes : ſouvent l'on ſe retrouve, ſans y penſer, au même endroit d'où l'on étoit parti ; ou bien à force d'avoir entaſſé abſurdités ſur abſurdités (& c'eſt à quoi peut conduire une ſimple inadvertance) on vient enfin à reconnoitre qu'il y a de la mépriſe : de plus, on parvient, ſi l'on peut, à ſe délivrer des grandeurs inconnues, & à reduire toutes ſes équations à une ſeule, qui ſe convertit en formule, dont l'application eſt des plus faciles ; il n'y a qu'à avoir un peu de loiſir pour chercher des exemples, on aura pour lors dequoi ſe ſatisfaire. Que ſi l'on vouloit ſe repréſenter d'une maniére bien diſtincte toute la ſuite des opérations qu'il a fallu faire pour arriver à ſa concluſion, cela demanderoit des efforts d'attention trop ſoutenus & une peine inconcevable : mais quand il ne s'agit que de prendre la formule d'un Problème afin de ſubſtituer des nombres ou des quantités déterminées aux expreſſions littérales, le travail n'eſt que des plus médiocres.

Ce que je viens de dire au ſujet de l'Analyſe n'eſt pas pour la décrier entiérement, bien loin de-là, je ſuis très perſuadé

que

que c'eſt une partie conſidérable des Mathématiques & même des plus utiles, quand on ſait en bien uſer, & que l'on s'y prend d'une maniére convenable. Je voudrois ſeulement conſeiller aux commençants de ne point l'entreprendre ſi-tôt, parce qu'elle demande un eſprit déja formé à l'évidence & à l'exactitude, talents que l'on ne doit pas ſuppoſer conſidérables dans ceux qui travaillent à les acquérir.

C'eſt par la même raiſon que je paſſe encore ſous ſilence, les logarithmes, les changemens d'ordre, les combinaiſons &c. Ce ſont des choſes à la vérité qu'il ne faut abſolument point négliger; mais j'attens pour cela, que vous ſoyez plus affermi dans les principes que j'ai tâché de vous donner, & que j'ai crû les plus eſſentiels pour le but que vous vous propoſés.

Voilà, à peu près, les inſtructions, que j'avois réſolu de vous donner à ce ſujet: mon deſſein ſeroit de les continuer, comme vous m'en avez prié il n'y a pas long-tems, ſi je n'en étois empêché par le voiage dont je vous ai parlé ce matin, & qui me retiendra ſûrement l'eſpace de quelques mois hors du Païs; je vais donc finir par quelques remarques qui peut-être ne vous ſeront pas inutiles.

La

La prémière qui ſe préſente le plus naturellement à l'eſprit eſt celle-ci, c'eſt que tous les ſujets que l'on traite (& j'ôſe le dire ſans exception) ſont de nature à ne pouvoir être exempts de difficultés dans l'étude que les hommes en font; il ne les connoiſſent jamais dans toute l'étenduë ni avec toute la clarté qu'ils le ſouhaitteroient. Les choſes les plus évidentes, celles qui ſont le plus ſuſceptibles de clarté & de démonſtration, ceſſent de l'être quand on veut trop les approfondir, & les enviſager avec tant d'application. A la queſtion *qu'eſt-ce que?* & à la queſtion *d'où vient?* s'évanouiſſent, pour ainſi dire, l'éclat de l'évidence & ſa lumiére reſpectable. La curioſité de l'homme n'a point de bornes, & ſon ſavoir eſt extrêmement borné: d'ailleurs plus porté à fixer ſes regards ſur ce qui lui manque, que ſur ce qu'il poſſéde effectivement, il ſe croit dans l'indigence, lors même que tout rempli d'érudition, il a fait des progrès ſurprenants & rapides dans le chemin de la vérité.

Mais revenons à nos défauts, il eſt bien plus important de les connoitre; arrêtons-nous encore un moment ſur nos imperfections: qu'eſt-ce que le mouvement?

ment ? en quoi consiste sa quantité ? quelle est la commune mesure ou l'unité à laquelle on puisse rapporter divers mouvements ? qu'est-ce que la durée ? qu'est-ce que l'espace ? plus je m'enfonce dans ces sortes de questions, & moins j'ai de connoissance du sujet qui les a fait naître : avant cela, je le savois bien, j'en avois des idées claires & distinctes, mon système à ce sujet paroissoit des mieux fondés & des plus intelligibles : mais ces idées si simples en apparence disparoissent tout à coup & semblent rentrer dans le sein de l'obscurité, lorsque pour être trop curieux, je demande incessamment *pourquoi cela? & quelle en est la cause ?* de même en est-il sur l'objet de la science que nous venons de traiter. Qu'est-ce qu'une chose finie ? que veulent dire ces bornes qui la terminent ? en quoi consiste la nature de la grandeur en général ? comment se fait une augmentation & une diminution successive, comment peut-elle aller jusques à l'infini ? comment concevoir une grandeur qui va toujours en décroissant, & qui conserve pourtant toujours une partie de ce qu'elle étoit auparavant ? enfin qu'est-ce qu'un nombre ? qu'est-ce que l'unité & cette suite

te infinie d'assemblages possibles & de combinaisons dont ils sont capables? les nombres ne sont-ils que des idées? ou si c'est autre chose, n'y en a-t-il eu qu'après la création? existent-ils d'une maniére invariable & nécessairement?

Il y a encore un grand nombre d'autres questions plus capables d'embrouiller l'esprit que de l'éclaircir & le convaincre. Mais de tout cela je conclus que quand on a trouvé une proposition qui peut être démontrée & mise dans un jour convenable, par le moyen d'autres propositions sur lesquelles on ne peut raisonnablement doûter, il est superflu & même dangereux de chercher toujours une plus grande évidence que celle que l'on a déja, & qui à supposer qu'elle ne fut pas absolument satisfaisante, doit pourtant fixer nos doutes à ce sujet pour s'emparer de notre assentiment & de notre croyance. Une trop scrupuleuse exactitude fait un très grand tort à l'esprit, c'est une remarque que nous avons déja eu occasion de faire; mais ceci n'a rien qui puisse autoriser l'esprit de crédulité, & le manque de circonspection, & voilà pourquoi il faut, autant qu'on le peut, tenir un certain équilibre entre la trop grande exactitude & le défaut qui

qui lui eſt oppoſée ; en ſorte néanmoins que l'on ait en quelque maniére plus de diſpoſition à ne pas croire une propoſition bien prouvée, que de donner ſon aſſentiment à une autre qui ne l'eſt pas ; car la prémiére extrémité eſt encore plus dangereuſe que l'autre.

Je remarque en ſecond lieu que les Mathématiques ſont une Science vaſte & extrêment étendue ; elle contient un ſi grand nombre de parties, & embraſſe tant d'objets diférents, que la vie d'un homme, quelque longue qu'elle pût être, ne ſauroit le mettre en état, malgré tout ſon génie & toute ſon activité, d'être un Mathématicien parfait, à ne prendre même ce terme que dans un ſens impropre. Les Mathématiques ſont en quelque façon une grandeur qui peut aller à l'infini, & les nouvelles découvertes que l'on y fait tous les jours, ne ſemblent annoncer autre choſe, ſi ce n'eſt qu'il y a toujours plus de chemin à faire qu'il ne paroiſſoit auparavant. Ceux même qui ſont les plus habiles & les plus conſommés dans cette Science ſont mieux convaincus que les autres de cette vérité, parce que ce n'eſt qu'après s'y être engagé bien avant que l'on peut appercevoir cette vaſte étendue qu'il reſte encore à parcou-

rir.

rir. Concluons de tout cela, que l'ouvrage ne nous manquera jamais, tandis que nous ne manquerons pas à l'ouvrage; & que ce seul objet est capable d'absorber tout à la fois l'esprit entier du genre humain, fut-il réuni dans une seule tête; & cela pendant la durée d'une infinité de siécles, car ceci pris d'une certaine façon ne donne absolument point dans l'hyperbole, bien loin de là. Cela étant, nos obligations & nos travaux ne nous manqueront jamais, non seulement pour la quantité des choses qui nous restent à connoitre; mais encore si l'on veut n'acquérir que des idées sures & évidentes, on trouvera dans les Mathématiques un tréfor, & un fond inépuisable de vérités toujours nouvelles, qui n'attendent que notre application & nos recherches pour se donner à nous avec tout ce qu'elles ont de charmes & d'attraits, quand elles trouvent un esprit qui sait les admirer, & en faire tout le cas qu'elles méritent, par le caractère auguste d'évidence & de clarté dont elles sont revêtues. 3° Je vous ai déja averti plus d'une fois que rien n'étoit plus hors d'œuvre que ces *infiniment petits* que les Mathématiciens de nos jours prodiguent plus que jamais à l'imagination des esprits qui manquent

quent de circonſpection & d'exactitude. C'eſt un galimathias dont on a chargé cette Science, & qui en fait autant partie que le traité de *digeſtis romanorum* l'eſt de la Phyſique ou de la Médecine. On diroit que ces Meſſieurs ont épuiſé tout le fini, & qu'ils n'ont plus à faire maintenant qu'à parcourir ces régions immenſes qui n'ont aucunes bornes: & ces infinis, ils ont voulu même, en quelque ſorte, les aſſujettir aux loix de leur calcul; mais ce qu'il y a de bien ſûr, c'eſt qu'ils donnent ce nom à ce qu'il leur plait, & qu'ils croyent opérer ſur l'infini, quand au fond ils ne raiſonnent que ſur de ſimples grandeurs. Je vous conſeille donc de laiſſer l'infini en repos, & de vous en tenir avec ce qui à, au moins, quelque rapport avec notre intelligence. Si une fois, vous pouvez venir à bout d'épuiſer tout ce qui regarde les grandeurs, nous prendrons pour lors, de nouvelles meſures, & peut-être, que convaincus par les prétendues démonſtrations de nos Mathématiciens, nous pourrions bien entreprendre quelque jour cet important ouvrage. Avant que cela arrive, je pourrois auſſi être de retour de mon voyage; ainſi quand vous auriez, comme je l'eſpére, aſſés de con-

confiance en moi, pour ne pas l'entreprendre pendant mon abſence, vous n'avez pas dequoi vous impatienter ſur cet article.

Je laiſſe ici *l'infini* pour mettre fin à notre converſation, en vous conſeillant d'entreprendre auſſi tôt que vous le pourrés, l'étude de la Géométrie qui ſera aſſûrément de votre goût, dès que vous voudrés bien y donner vos ſoins & votre attention.

NEANDER. C'eſt bien là mon deſſein, après que j'aurai achevé & repaſſé aſſés ſouvent mon cours d'algébre; mais ce ne ſera jamais que par vos conſeils que je me déterminerai, tant que vous aurés la bonté de me diriger dans mes études.

MATHESIUS. Vous pouvés compter ſur moi, comme ſur un de vos meilleurs amis, & profiter hardiment des petits ſecours que je ſuis en état de vous procurer; ſoyez par conſéquent perſuadé que je ne négligerai jamais l'occaſion de vous le témoigner autrement que par de ſimples paroles, ſur tout connoiſſant ſi bien vos bonnes diſpoſitions à mon égard. Mais il eſt temps que nous nous quittions dès-à préſent, & comme je ne pars qu'après de-

demain, nous avons tout le tems néceſſaire de nous revoir, & même nous pouvons nous retrouver déja ſur la fin du jour.

NEANDER. C'eſt une heure que j'attens avec bien de l'impatience.

*FIN.*

TABLE

1 1461359

# TABLE
## DES
# MATIÉRES.

### A.

*Addition*, c'eſt le genre ; & la Multiplication en eſt une eſpèce I. 159. des nombres exprimés par chifres II. 127. des nombres exprimés dans la progreſſion quintuple 174. par chifres, dans les grandeurs hétérogènes. 183
*Aliquote* I. 153
*Alternando* 320
*Argument* d'une propoſition, il faut l'écrire ſoi-même. 44
*Attention*, ce que c'eſt, 8. on l'acquiert dans les Mathématiques, 103. objection à ce ſujet. 105
*Auteurs* (quels) on doit choiſir pour étudier une Science. 25

*Axio-*

Digitized by Google

*Axiomes*, ce que c'eſt, & en quoi ils différent des ſuppoſitions 17. ce qui empêche de les bien concevoir, 18. quel eſt le prémier de tous 133; le ſecond, 135. le prémier Axiome Mathématique *ibid.* le ſecond, 136. troiſiéme, quatriéme &c. 137 &c.

B.

*Binome* I. 140

C.

*Certitude* prémier avantage des Mathématiques I. 49
*Change* (Règle de). 347
*Chifres* (l'uſage & la ſimplicité des) II. 111
*Commentaires*, I. 35
*Compends* (utilité des). 35
*Compagnie* (Règle de) ſurquoi elle eſt fondée. 349
*Componendo*. 321
*Comprend* (à quoi l'on peut connoitre ſi l'on) une choſe exactement. 39
*Controverſes* dans les Mathématiques 51
*Convertendo* 324
*Corollaires* 19. 11. 72

*Cours*

*Cours* de Logique, utile pour les Mathématiques I. 3
*Cubiques*, (extraction des racines) II. 209

## D.

*Definition* I. 15
*Demandes* (ce que c'eſt que les) 15, exemple. 16
*Demonſtrations*; ce ſont les meilleures ſortes de preuves 13
Il en faut faire ſoi-même 37. faites par calcul littéral *ibid.* de cette propoſition, deux & deux ſont quatre. 41
*Démontrer*, ce que c'eſt 5
*Difficulté* ſur la multiplication. 149
*Dividende*, (le quotient multiplié par le diviſeur eſt égal au) 175
*Dividendo.* 323
*Diviſeur*, (ce que c'eſt que le plus grand commun) II. 52. on le trouve par la ſouſtraction 54. &c. Méthode par la diviſion 57, avantages de l'une & de l'autre 62
*Diviſion*, ce que c'eſt I. 169. prémières idees de la diviſion 169, 170. des grandeurs complexes & incomplexes 177. elle



Digitized by Google

ſuppoſe les raiſons 314. diviſion des nombres exprimés par chifres II. 147. pourquoi elle ne ſe commence pas par la droite, comme les autres opérations 157. diviſion des nombres dans la progreſſion quintuple. 179. comment elle ſe fait par chifres dans les grandeurs hétérogènes. 186

E.

*Egalité*, ce que c'eſt I. 131
*Eloquence* par rapport aux Mathématiques 79
*Enfans* (les Mathématiques ſont utiles pour les) 112
*Etendue* d'eſprit, on l'acquiert dans les Mathématiques 102
*Etude* (avis touchant l') 45
*Evidence* (ce que c'eſt que l') 9; il faut toujours régler ſes jugemens ſur elle 25. il ne faut pas en chercher une plus grande que l'on ne peut avoir 40
*Exemples*, leur force, 33
*Explication* particuliére de ce que c'eſt que grandeurs. 121
*Expoſants* d'une raiſon, ce que c'eſt 295
*Extrêmes*. 234



Digitized by Google

## F.

*Facteurs*, la valeur d'un produit dépend de l'un & de l'autre. I. 143. leur changement d'ordre ne fait rien à la valeur du produit 155
*Fini*, ce que c'eſt, objections à ce ſujet 160 &c.
*Fractions*, pourquoi on n'en a pas parlé plûtôt 356. quand elles ont lieu 358. fractions décimales II. 187

## G.

*Grandeurs*, ce que c'eſt I. 119. Homogènes & hétérogènes, poſitives & négatives 183. Si la ſouſtraction eſt une grandeur négative 188. Maniére de faire l'addition de ces ſortes de grandeurs 190. Souſtraction 192. Multiplication 202. Diviſion 214. Grandeurs (les) multipliées par une troiſiéme ſont entr'elles, en même raiſon qu'auparavant. 312. ce qu'il faut faire en général pour qu'elles demeurent dans la même raiſon, quand on change leur valeur. 313



Digitized by Google

## I.

*Idée* moyenne, de quelle maniére on s'en ſert. I. 14. intellectuelles, ( uſage continuel des idées ) troiſiéme avantage des Mathématiques. 68
*Infini* ( réflexions ſur l' ) 160. II. 82
*Intérêt* ( règle d' ) I. 347
*Interpoſition* d'une grandeur entre pluſieurs autres II. 18
*Invertendo*, ce que c'eſt, I. 318

## L.

*Leçon*, ( maniére de repaſſer une ) I. 22
*Lemme.* 19. II. 70
*Livre*, s'il faut le lire pluſieurs fois I. 24
*Logique*, on en fait un uſage continuel dans les Mathématiques. 70

## M.

*Mathématiciens*, pourquoi ils ſe trompent ſi ſouvent dans ce qui fait l'objet de leur ſcience. I. 38
*Mathématiques* ( les ) ſont une Science, 4. objection, tirée de ce qu'elles ſont nuiſibles

sibles à la Société 54. leur utilité 48. &c. pourquoi on est ordinairement prévenu contr'elles 75. elles s'oublient facilement 114. on y avance très peu quand on veut les posseder à fond 115. on les traite analytiquement & synthétiquement 116

*Méthodes* (deux sortes de) 101 &c.

*Moyens*, 234. proportionnel entre deux grandeurs données. II. 101

*Multinome* I. 140. Toute aliquote d'un multinome à quoi elle est égale I. 309

*Multiplication*, ce que c'est 141. c'est une espèce de proportion 342. des nombres exprimés par chifres II. 133. des nombres exprimés par la progression quintuple 178. par chifres dans les grandeurs hétérogènes. 185

*Multiplier* les fractions 16. exemples de cette sorte de multiplication. 21

## N.

*Neuf* (propriété du nombre) II. 167

*Nombres*, ce que c'est I. 127. leurs prémières propriétés 127 &c. Ce sont des produits de l'unité par eux-mêmes 141. on ne les conçoit pas d'une seule vûe dès qu'ils sont tant soit peu com-

posés II. 107. un nombre étant proposé, l'exprimer par chifres. 125

O.

*Objections* contre les Mathématiques I. 71, 72 &c.
*Objet*, si l'on peut s'assurer qu'ils existent. 9
*Ordre* dans les Mathématiques. 97

P.

*Pair* (nombre) ce que c'est I. 272. addition 275. Multiplication 227. &c. des nombres pairs & impairs.
*Pénétration*, avantage des Mathématiques. 85
*Penser*, ce que c'est, 6
*Plan* 151. divisé par l'un des facteurs, il redonne l'autre facteur 176. ils sont les uns aux autres en raison composée de celles de leurs racines II. 47
*Position* (Règle de fausse) I. 35
*Præcognita* & Prologomenes. 95
*Preuve* de 9 comment elle se fait II. 159, surquoi elle est fondée 161. en quel sens on peut dire qu'elle n'est pas sûre 165

*Problèmes* 19. indéterminés sur les progressions Arithmétiques I. 254. sur les progressions Géometriques 90. 91 &c. Analytiques & algébriques II. p. 222
*Produits* I. 141. Quand ils sont égaux 142. Un produit est composé toujours d'autres produits partiaux 145. Ce qu'il devient quand on ajoute, ou que l'on ôte l'unité de l'un ou de l'autre facteur. 147
*Progressions* Arithmétiques ce que c'est I. 237. il y en a de deux sortes & l'on y considere 5 choses principales 238. Ce qu'il faut pour en déterminer une 240. Ce qu'est chaque terme d'une Progression à la reserve du prémier 241. divers Problèmes sur les Progressions 243 &c. somme des extremes à quoi elle est égale 245. somme de la Progression, comment on la trouve 252. Progressions qui vont en diminuant 254. Progression naturelle 263. ses propriétés 265 &c. Progression des nombres impairs 285. ses proprietés 286. Géometriques, ce qu'elles sont particulierement II. 63. ses proprietés 64 &c. Progression décuple 122. principes nécessaires pour son intelligence. 123

*Propoſition*, quand un peut démontrer une I. 12. évidentes, on en parle ſouvent ſans en avoir d'idées. 42
*Proportions* Arithmétiques I. 231. continues ou diſcretes 234. la ſommedes extremes, eſt égale à celle des moyens *ibid.* Géometriques 298 ſes proprietés 327. &c. directes & inverſes 337, elles ne ſont pas eſſentiellement différentes 341
*Puiſſances* d'une grandeur I. 151. celles d'une même grandeur ſont en progreſſion. II. 99. imparfaites, 195. maniére de les reduire par approximation 215. leur extraction en général 214

## Q.

*Quantité*, comment on la définit I. 125
*Quantité*, c'eſt un terme relatif 130
*Quarré* 150. d'une fraction II. 17. ils ſont en raiſon doublée de celles de leurs racines 49. le produit de deux quarrés en eſt lui-même un. 195
*Quatre* (deux & deux ſont) comment on le démontre I. 41
*Queſtion* la plus ſimple de toutes 6

*Quotients* d'une même grandeur diviſée par différents diviſeurs. 341

R.

*Racine* d'une raiſon I. 315. leur extraction par chifres II. 193
*Raiſons* Arithmétiques I. 223. il en eſt de trois ſortes 229
*Raiſons* Géométriques 290. leurs propriétés 300 &c. Raiſons qui ont un même conſéquent 361. Maniére de les reduire 365. addition des raiſons 369. ſouſtraction 370. Raiſons compoſées II. 1. Méthode pour trouver les raiſons compoſées 22. diviſion des raiſons 25. quelle méthode on doit ſuivre 30. ſon uſage 36. trouver une quatriéme raiſon proportionnelle à trois autres données 37
*Regle* de Logique, ſon application à un cas particulier I. 11

S.

*Science*, définition ordinaire I. 4. def. plus exacte 5. idées d'une véritable ſcience 20. maniére de l'étudier 26. &c. il n'y en a aucune qui n'ait ſes défauts 93

*Senſations.* 7
*Souſtraction* 167. des nombres exprimés par chifres. II. 142. des nombres de la progreſſion quintuple 177. par chifres dans les grandeurs hétérogènes. 185
*Syllogiſtique.* I. 326

## T.

*Termes* (préciſion & exactitude dans les), avantage des Mathématiques I. 77
*Théoreme.* 19. II. 71
*Trois* (Régle de) I. 337. Exemples. 344. compoſée II. 38. deux méthodes que l'on peut ſuivre à ce ſujet. 42

## V.

*Verité* (amour déſintereſſé de la) avantage des Mathématiques I. 62
*Unité*, ce que c'eſt 126. ſon produit par elle-même eſt encore l'unité 142



Digitized by Google

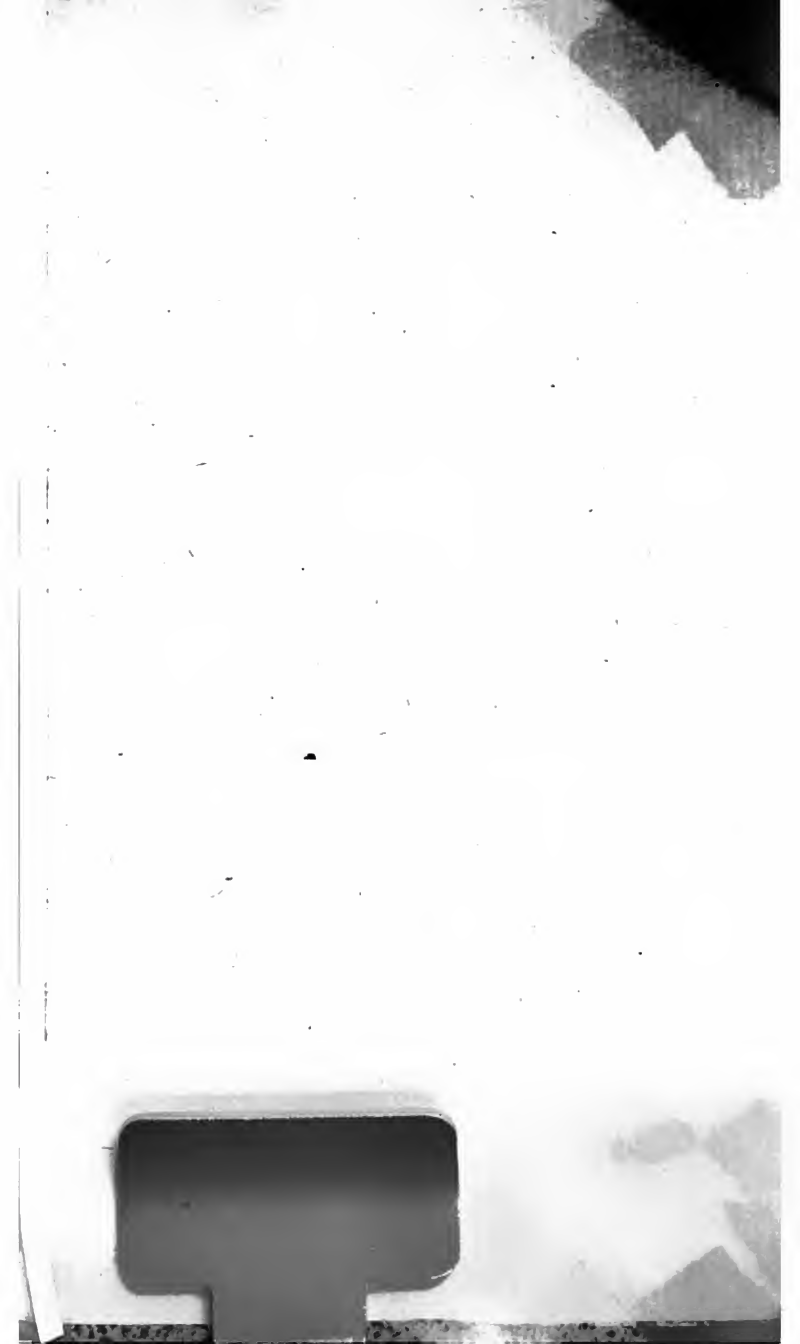
# ERRATA.

Page 7. l. 9. *lisés* nature
12. l. 7. *lisés* sentir
14. l. 6. *lisés* qu'elles
15. l. 24. *lisés* quelle
25. l. 25. *lisés* de l'ordre, de la netteté
29. l. 16. *lisés* de
42. l. 20. *lisés* étonnant
61. l. 20. *lisés* leur
64. l. 29. *lisés* d'autant
65. l. 1. *lisés* risques, l. 12. *lisés* toute mépriſe
84. l. 1. *lisés* qu'étants
86. l. 27. *lisés* moins
90. l. 6. *lisés* impénétrables.
109. l. 19. *lisés* enfin,
110. l. 25. *lisés* disputer
112. l. 11. *lisés* mieux que de
117. l. 14. *lisés* quelle
123. l. 11. A B *mettés* A — B
126. l. 25. *lisés* in
136. l. 3. *lisés* est,
140. l. 11. à linea.
147. l. 21. *lisés* × sqq. aussi ×
161. l. 12. *lisés* la
169. l. 6. *lisés* $\frac{s}{2}$
194. l. 15. *lisés* $a, -a, a + a = 2a$. *lisés encore* $a$, l. 16. $a + b = a + b$ l. 17. *lisés* $= b + a$.
200. l. 1. *lisés* $=$
205. l. 8. *lisés* ὁτι ς
211. l. 2. *lisés* grandeur l. 17. *lisés* $= 84$.
212. l. 24. *lisés* 14 +
217. l. 23. *lisés* 20 est égal à 12, une fois
218. l. 23. *lisés* $a : b - c$



Digitized by Google

219. *l.* 13. *effacés* I.
220. *l.* 15. *lisés* par
233. *l.* 28. *lisés* puissent
235. *l.* 28. *lisés* proportion
247. *l.* 5. 6. 7. il ne faut point de caractères italiques.
283. *l.* 9. *lisés* que le diviseur ne soit éxact.
285. *l.* 16. *lisés* faits
303. *l.* 26. *lisés* conséquent
310. *l.* 23. *lisés* 4.
332. *l.* 12. 13. 14. il ne faut point de caractères italiques.
348. *l.* 7. *lisés* car
366. *l.* 26. *supplées* en 72 parties
367. *l.* 7. *lisés*, ce qui est la même chose.
II. *pag.* 19. *l.* 8. *lisés* 3.
20. *l.* 11. *lisés* $b\,c\,d\,e\,f\,g$
35. *l.* 15. *lisés* $\frac{8}{1}$
49. *l.* 18. *lisés* Théorème:
55. *l.* 22. *lisés* nature
57. *l.* 7. *supplées* ou égal
60. *l.* 8. *supplées* ou elle lui est égale. *l.* 9. *effacés* toujours
68. *l.* 17. *supplées* que l'on peut.
72. *l.* 6. *lisés* $qs + a =$ *l.* 14. *lisés* proposition.
75. *l.* 20. *lisés* retourner
76. *l.* 1. *lisés* de la
78. *l.* 16. *lisés* implique, même, contradiction.
81. *l.* 5. terme, $\frac{2}{2}$
90. *l.* 19. 501. *lisés* SOLUTION. La même faute se trouve dans les pages 91, 93, 95.
*l.* 26. *lisés* de
116. *l.* 21. *lisés* pour le plus
117. *l.* 16. *lisés* tacitement
117. *l.* 18. *lisés* 103.
146. *l.* 29. *lisés* j'ai suivi
154. *l.* 23. *lisés* 17,

401 1461359
Digitized by Google

AA 1146135